| |
|---|
| Seminar Praktikum “Communications 1” |
| Seminarversuch 2 “Signalparameter im Zeit- und Frequenzbereich” |
| Fachgebiet: Nachrichtentechnische Systeme |
| Name: Matr.-Nr.: |
| Betreuer: Datum: |

**Die Vorbereitungsaufgaben müssen vor dem Seminartermin gelöst werden.**

# Inhaltsverzeichnis

# 0 Hinweise zum Referat

Zu Beginn des Seminars soll einer oder mehrere der für das einführende Referat verantwortlichen Studenten einen Kurzvortrag von ca. 15-20 Minuten halten, in dem die wesentlichen Aussagen zu diesem Thema zusammengefasst dargestellt werden.

Die Präsentation ist **vor** Seminarbeginn vorzubereiten. Die hierfür nötigen Hilfsmittel (Folien, Overheadprojektor) werden zur Verfügung gestellt.

**Sie können diesen Kurzvortrag entweder handschriftlich auf dem Overheadprojektor oder mit selbstgefertigten Folien vortragen oder auf einen Satz vorgefertigter Folien zurückgreifen, die beim Versuchsbetreuer als Folien verfügbar sind und auf unseren Internetseiten als pdf-Dateien zur Verfügung stehen!**

# 1 Vorkenntnisse

Zur Teilnahme an diesem Seminarthema sind Vorkenntnisse in folgenden nachrichtentechnischen Bereichen erforderlich:

- Signaldarstellung als Funktion und als Skizze
- Zeitkontinuierliche, zeitdiskrete, wertkontinuierliche und wertdiskrete Signale
- Bedeutung und Unterschied von Zeit– und Frequenzbereich
- Fourier–Transformation und Fourier–Reihen
- Signalabtastung und Nyquist–Rate
- Analoge Modulation, speziell Amplitudenmodulation
- Mathematische Grundlagen: Faltung und Integration

Die hierzu nötigen theoretischen Grundlagen werden in den Vorlesungen (je nach Studiengang „Grundlagen der Nachrichtentechnik 1“, „Signals and Systems 1“, „Information Engineering 1“) vermittelt. Eine kurze Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen folgt außerdem in den Abschnitten weiter unten. Zusätzlich ist im Anhang eine Literaturliste aufgeführt. **Bitte stellen Sie in Ihrem eigenen Interesse sicher, dass Sie die theoretischen Grundlagen beherrschen, da andernfalls eine Teilnahme am Seminarthema nicht möglich ist.**

# 2 Theoretische Grundlagen und Definitionen

## 2.1 Signale und ihre Darstellung im Zeitbereich

Signale der elektrischen Nachrichtentechnik sind zeitabhängige elektrische oder magnetische Größen. Sie lassen sich als Funktion der Zeit (im Zeitbereich) oder als Funktion der Frequenz (im Frequenzbereich) beschreiben. Allgemein sei ein Signal durch die Zuordnungsvorschrift (Funktion) $x(t)$ gekennzeichnet, durch die den Werten $t$ aus dem Zeitbereich (Definitionsbereich) Werte $x$ aus dem Wertebereich zugeordnet werden. Im Folgenden wird zur Vereinfachung vorausgesetzt, dass die Funktion $x(t)$ reell ist.

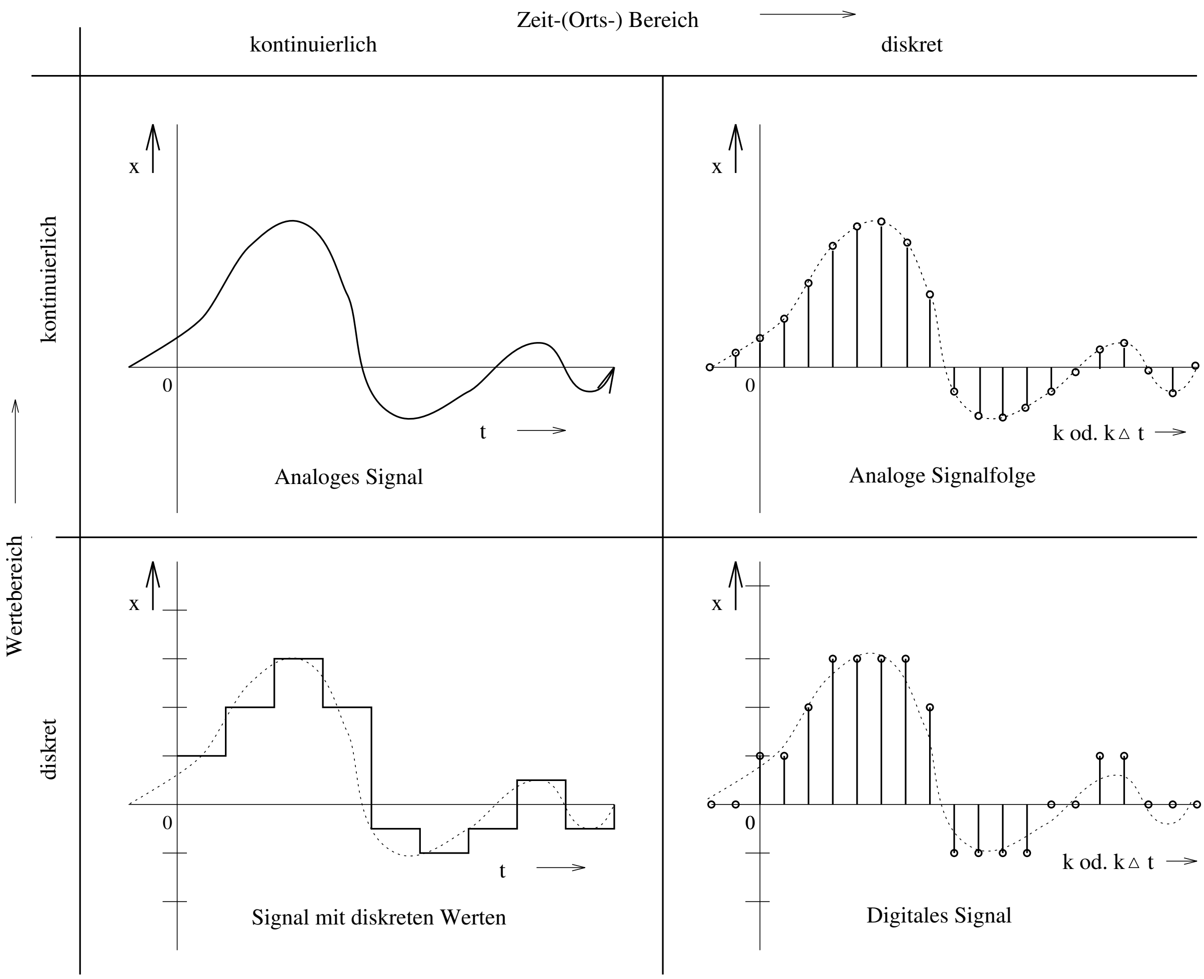


**Bild 1:** Zeit- und Werteigenschaften von Signalen

Je nach Art der Zeitfunktion können Signale sowohl hinsichtlich des Wertebereiches als auch hinsichtlich des Definitionsbereiches auf der Zeitachse kontinuierlich oder diskret sein. Unter kontinuierlich versteht man hierbei, dass eine betrachtete Größe alle Werte eines Kontinuums (z.B. eines Intervalls) annehmen kann, während diskret bedeutet, dass die betrachtete Größe nur durch einzelne bestimmte Werte oder bestimmte nicht überlappende Wertintervalle eines Wertebereiches gegeben ist. Mit diesen Begriffen unterscheidet man zwischen wertkontinuierlichen und wertdiskreten bzw. zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Signalen, wobei jede Zeiteigenschaft mit jeder Werteigenschaft kombiniert werden kann.

Durch die Angabe weiterer spezieller Eigenschaften der Funktion $x(t)$ können bestimmte Signale gekennzeichnet werden, z.B.:

Besitzt die Funktion $x(t)$ die Eigenschaft:

$x(t) = x(t + kT)$; $k$ - ganzzahlig $-\infty < k < +\infty$; $T$ - Konstante mit der Dimension Zeit, so spricht man von einem periodischen Signal. Die Periodendauer des Signals ist $T$. Weichen die Werte des Signals nur innerhalb einer beschränkten Zeitspanne merklich von Null ab, so spricht man von einem Impuls. Eine periodische Folge von gleichen Impulsen nennt man Impulsfolge oder Puls.

Konvergiert das Integral

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

gegen einen endlichen Wert, so spricht man von einem Energiesignal ([9], Abschnitt 4.1). Der Wert des Integrals $E$ wird als Energie des Signals bezeichnet.

Hat der Ausdruck

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$$

einen von Null verschiedenen, endlichen Grenzwert, so spricht man von einem Leistungssignal [9]. Der Wert des Integrals wird als Leistung $P$ des Signals bezeichnet. Betrachtet man rein reelle Signale $x(t)$, so kann man in den Definitionen für Energie und Leistung auf die Betragsbildung verzichten, d.h. $|x(t)|^2 = x^2(t)$.

## 2.2 Signale im Frequenzbereich

Eine periodische Zeitfunktion kann durch eine unendliche Summe von Cosinus- und/oder Sinusfunktionen dargestellt werden, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz der periodischen Zeitfunktion sind. (Es wird vorausgesetzt, dass alle hierzu notwendigen Konvergenzbedingungen erfüllt sind. [10],[11]) Eine solche Darstellung nennt man Fourier-Reihe.

### 2.2.1 Fourier-Reihe

**Formeln zur Fourier-Reihe:**

$x(t) = x(t + nT_0)$ ; reelle periodische Zeitfunktion mit der Periodendauer $T_0$ ($n$ ganze Zahl)

$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, $t_0$ beliebiger Zeitpunkt

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} \qquad \text{mit} \qquad \underline{c}_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t} \mathrm{d}t \tag{1}$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \Re \underline{c}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t} \qquad \text{mit} \qquad c_0 = \frac{1}{T_0} \int\limits_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,|\underline{c}_n|\,\cos(n\omega_0 t + \phi_n) \qquad \text{mit} \qquad \phi_n = \arg(\underline{c}_n) \tag{3}$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,|\underline{c}_n|\,\sin(n\omega_0 t + \phi_n') \qquad \text{mit} \qquad \phi_n' = \phi_n + \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \tag{5}$$

$$\text{mit:} \qquad a_0 = 2 \cdot c_0; \qquad a_n = 2 \cdot \Re\{\underline{c}_n\}; \qquad b_n = -2 \cdot \Im\{\underline{c}_n\}$$

Die Gleichungen (1) bis (5) geben fünf gleichwertige Beschreibungen der Zeitfunktion $x(t)$ durch harmonische Sinus- und/oder Cosinusfunktionen der Grundkreisfrequenz $\omega_0$ an. Die Gleichung (1) definiert die sogenannte komplexe Fourier-Reihe.

Unter Berücksichtigung dieser beiden Beziehungen kann eine periodische Zeitfunktion durch Angabe der komplexen Koeffizienten $\underline{c}_n$ beschrieben werden. Aus Gleichung (1) folgt für reelle Zeitfunktionen $x(t)$:

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T_0} \int\limits_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)\,\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t \quad - \quad \mathrm{j}\,\frac{1}{T_0} \int\limits_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)\,\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t \tag{6}$$

für ganzzahlige $n$ mit $-\infty < n < +\infty$

Eine reelle Zeitfunktion $x(t)$ kann stets in einen geraden Anteil $x_\mathrm{g}(t)$ und einen ungeraden Anteil $x_\mathrm{u}(t)$ zerlegt werden.

$$x(t) = x_\mathrm{g}(t) + x_\mathrm{u}(t)$$

Es gilt:

$$x_\mathrm{g}(t) = x_\mathrm{g}(-t) \qquad \text{gerade Funktion}$$

$$x_\mathrm{u}(t) = -x_\mathrm{u}(-t) \qquad \text{ungerade Funktion}$$

$$x_\mathrm{g}(t) = \frac{1}{2}\,(x(t) + x(-t))$$

$$x_\mathrm{u}(t) = \frac{1}{2}\,(x(t) - x(-t))$$

Ferner gilt, dass das Integral über ein zum Nullpunkt symmetrisches Intervall einer ungeraden periodischen Funktion verschwindet.

### 2.2.2 Fourier-Transformierte

Die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ einer Zeitfunktion $x(t)$ ist in folgender Weise definiert:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{7}$$

Nun sei $x(t)$ eine auf das Intervall $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$ beschränkte Zeitfunktion (z.B. ein einzelner Impuls) und $x_\mathrm{p}(t)$ die Zeitfunktion einer Impulsfolge mit der Periodendauer $T_0$, die aus einzelnen, um $nT_0$ verschobenen Impulsen $x(t)$ so zusammengesetzt ist, dass sich die Impulse nicht überlappen:

$$x_\mathrm{p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_0), \qquad \text{wobei} \quad T \leq T_0 \tag{8}$$

Bild 2 zeigt drei Beispiele für derartige periodische Signale $x_\mathrm{p}(t)$.

$X(\omega)$ sei die Fourier–Transformierte des Signals $x(t)$ (des einzelnen Impulses). Es gilt unter diesen Voraussetzungen:

$$X(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{9}$$

Da $x_\mathrm{p}(t)$ durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden kann, gilt für die Entwicklungskoeffizienten $\underline{c}_n$:

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\mathrm{d}t \tag{10}$$

Hierin ist $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ die Grundkreisfrequenz. Mit $\omega = \omega_0$ folgt durch Vergleich der Gleichungen (9) und (10):

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0) \tag{11}$$

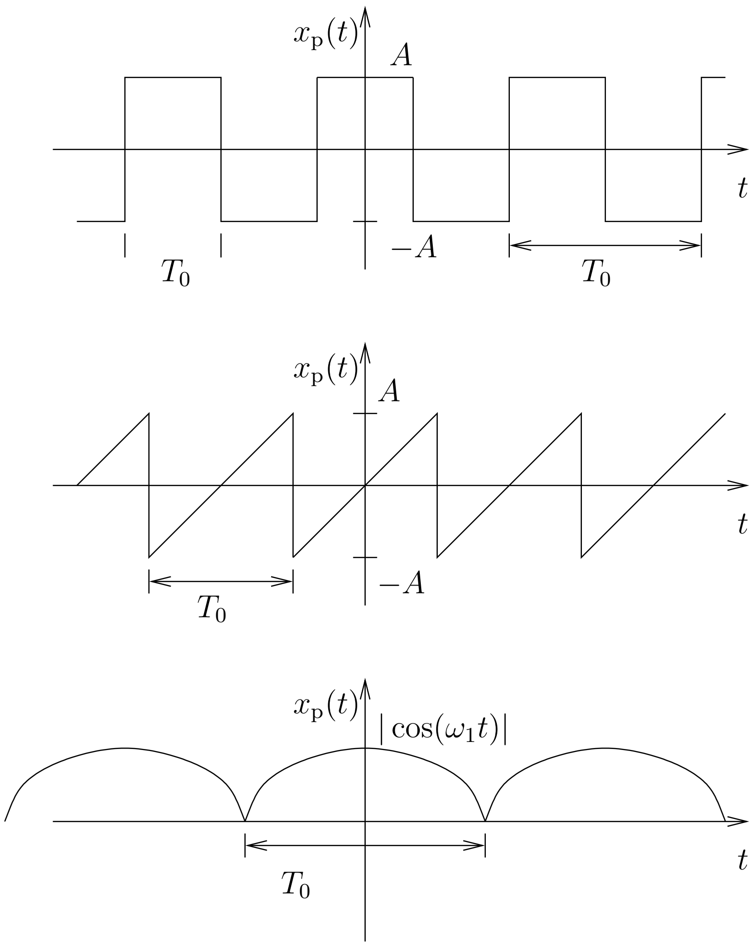


**Bild 2:** Beispiele für periodische Zeitfunktionen $x_\mathrm{p}(t)$ für den Fall $T = T_0$

Die Koeffizienten $c_n$ der Fourier-Reihe einer periodischen Impulsfolge sind proportional zur Fourier-Transformierten des Einzelimpulses dieser Impulsfolge an den Stellen $n\omega_0$. Der Proportionalitätsfaktor ist gleich dem reziproken Wert der Periodendauer der Impulsfolge. Dieser Zusammenhang wird bei der messtechnischen Bestimmung der Fourier-Transformierten eines Impulses ausgenutzt. Umgekehrt können aus der Fourier-Transformierten eines Impulses mit dieser Beziehung die Koeffizienten der Fourier-Reihe –die eine periodische Folge der betrachteten Einzelimpulse beschreibt– leicht hergeleitet werden.

**Beispiel:** Gesucht sei die Fourier-Transformierte der Signalfunktion $x(t)$ (siehe Bild 3).

Es gilt:

$x(t) = 0 \qquad \text{für} \qquad |t| > \frac{T}{2}$

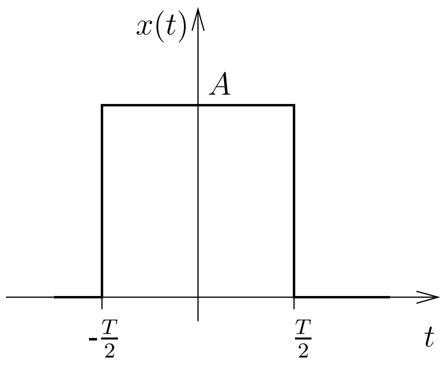


**Bild 3:** Funktion $x(t)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = A \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_t}\mathrm{d}t$$

bzw.

$$X(\omega) = A\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{T}{2}} - \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega\frac{T}{2}}}{-\mathrm{j}\omega} = A\,\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}$$

$$\underline{X(\omega) = A\,T\,\mathrm{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \tag{12}$$

Der Betrag $|X(\omega)|$ und Phasenwinkel $\phi(\omega)$ sind in Bild 4 dargestellt.

### 2.2.3 Energie und Leistung im Frequenzbereich

Es gilt ([11], Seite 28):

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(2\pi f)|^2\mathrm{d}f \tag{13}$$

Der Ausdruck $|X(\omega)|^2$ wird als spektrale Energiedichte bezeichnet.

Bei periodischen Vorgängen gilt für die Leistung ([11], Seite 22):

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2\mathrm{d}t = c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,|\underline{c}_n|^2 \tag{14}$$

Die Leistung eines periodischen Vorgangs ist also gleich der Summe der Leistungen seiner Fourier-Komponenten.

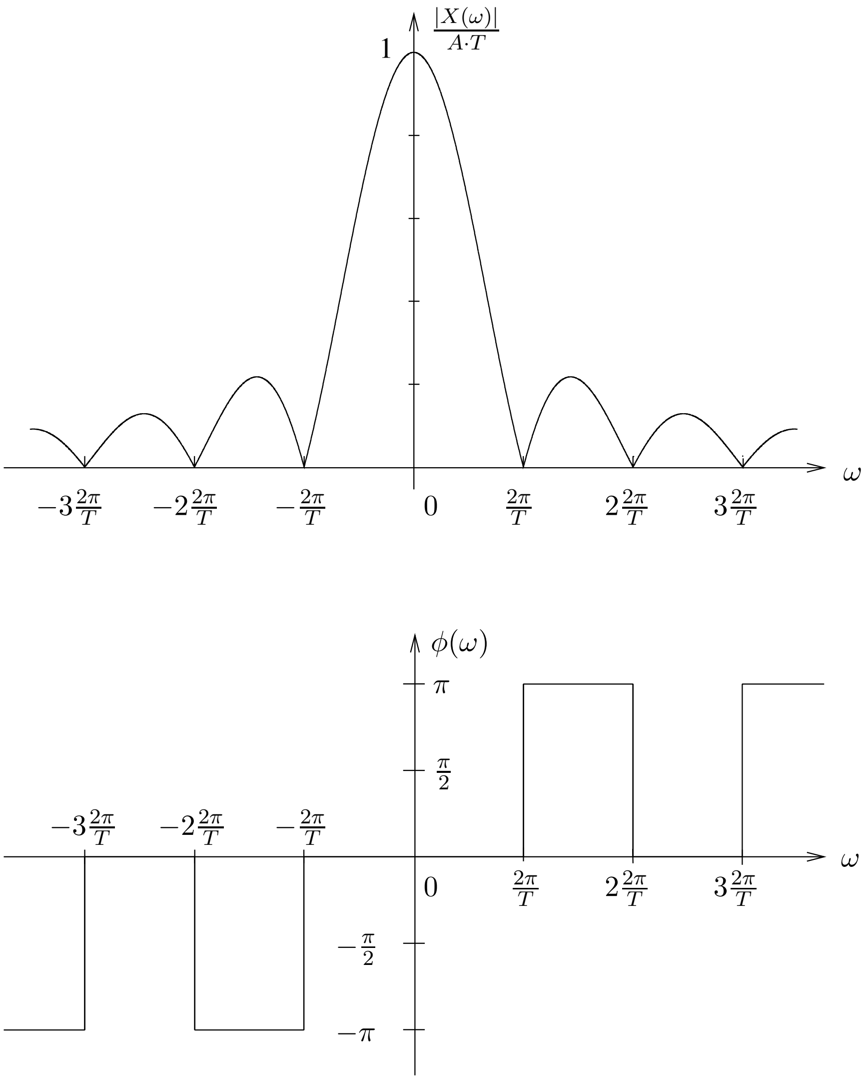


**Bild 4:** Betrags- und Phasenspektrum der Funktion $x(t) = A \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

Der Ausdruck

$$\lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta P(\omega)}{\Delta\omega} \tag{15}$$

wird spektrale Leistungsdichte genannt.

## 2.3 Die diskrete Fourier-Transformation

Mit der zur Verfügung stehenden Apparatur werden die Signale nicht wert- und zeitkontinuierlich verarbeitet und analysiert, sondern abgetastet, das heißt sie liegen sowohl zeit- als auch wertdiskret vor.

Die Spektralanalyse dieser zeitdiskreten Signale erfordert eine Transformation in ein frequenzdiskretes Spektrum. Dies wird mit der diskreten Fourier-Transformation (DFT) erreicht.

Liegen im Zeitbereich $N$ diskrete Abtastwerte $x(n)$ an den Stellen $t = nT$ vor, so ergeben sich im diskreten Frequenzbereich ebenfalls $N$ diskrete Spektralwerte im Abstand der reziproken Dauer $F = \frac{1}{N}$. Das diskrete Spektrum ergibt sich zu:

$$X_\mathrm{d}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk\frac{1}{N}} \qquad k = 0, 1, 2, .., N-1 \tag{16}$$

Eine besondere Berechnungsart der DFT ist die sogenannte Fast-Fourier-Transformation (FFT), bei der durch einen speziellen Berechnungsalgorithmus unter der Voraussetzung, dass genau $N = 2^n$ Abtastwerte vorliegen, die Zahl der Rechenschritte deutlich verringert wird. In der in diesem Seminar benutzten Software wird dieser Algorithmus zur Spektralanalyse verwandt.

## 2.4 Abtastung von Signalen

Numerische Methoden haben in zunehmendem Maße Bedeutung sowohl bei der Signalverarbeitung als auch bei der Signalübertragung erlangt. Dabei wird der Begriff "numerische Methoden" in weitesten Sinne gebraucht. So wird z. B. auch die Quantisierung der Zeitvariablen als "numerische" Betrachtung verstanden. Folgende Begriffe werden in diesem Zusammenhang verwendet:

1. Sowohl der Definitionsbereich (meistens ein endliches oder unendliches Intervall der Zeitachse) als auch der Wertebereich von Signalen kann kontinuierlich oder diskret sein. Kontinuierlich bedeutet, dass überabzählbar unendlich viele Werte zugelassen sind. Diskret heißt, dass nur abzählbar viele, in Spezialfällen auch nur endlich viele Werte vorkommen können.

2. Dementsprechend wird ein Signal wertkontinuierlich genannt,wenn es überabzählbar unendlich viele, verschiedene Werte annehmen kann.

3. Wertdiskret heißt ein Signal, das nur abzählbar viele Werte annehmen kann. Sind z. B. nur zwei Werte möglich, so handelt es sich um ein zweiwertiges oder binäres Signal.

4. Zeitkontinuierlich ist ein Signal, wenn zu jedem Wert des kontinuierlichen Zeitbereiches (Definitionsbereich) ein Wert des Signals existiert.

5. Zeitdiskret ist ein Signal, wenn es nur für abzählbar viele Zeitpunkte definiert ist.

6. Unter einem analogen Signal versteht man ein wert- und zeitkontinuierliches Signal, dessen mathematische Darstellung eine Funktion $x(t)$ oder $t \rightarrow x$ ist, die durch eine überabzählbare Anzahl von Wertepaaren $x, t$ gekennzeichnet ist.

7. Unter einem digitalen Signal versteht man ein wert- und zeitdiskretes Signal, dessen Darstellung $x(t)$ oder $t \rightarrow x$ durch eine abzählbare Anzahl von Wertepaaren $x, t$ gegeben ist.

In vielen praktisch wichtigen Fällen liegen die zu verarbeitenden Signale als analoge Signale vor. Beispiele dafür sind Sprachsignale, Musik, zeitkontinuierlich registrierte Messwerte o.ä . Zur Übertragung mit Hilfe einer digitalen Impulsfolge in einem Zeitvielfach (zeitl. Ineinanderschachteln mehrerer Impulsfolgen) ist es dabei notwendig, analoge Signale in digitale oder mindestens zeitdiskrete Signale zu überführen, ohne dass wesentliche Signalanteile dabei verlorengehen. Außerdem muss dafür Sorge getragen werden, dass das ursprüngliche Signal nach der Übertragung noch einwandfrei rekonstruierbar ist. Beim Übergang vom analogen zum digitalen Signal sind Schritte zu vollziehen, die in Bild 5 schematisch angegeben sind.

Die in Bild 5 dargestellten Schritte sind auch vertauschbar. Außerdem muss darauf hingewiesen werden, dass der angegebene Begriff “Quantisierung“ eine Quantisierung des Wertebereichs der Signalfunktion im strengen Sinne meint. Der Begriff Abtastung ist nichts anderes als eine Quantisierung des Definitionsbereichs der Signalfunktion (Zeitbereich). Nach diesen Vorbemerkungen lässt sich die Signalabtastung wie folgt verallgemeinern:

**Def.:** Die Signalabtastung ist die Darstellung eines zeitkontinuierlichen, wertkontinuierlichen (analogen) oder wertdiskreten Signals durch eine abzählbare Folge von Werten, die allgemein als Abtastwerte bezeichnet werden.

Der in Bild 5 skizzierte Übergang von einem analogen auf ein zeitdiskretes Signal beinhaltet eine Möglichkeit der Abtastung nach dieser Definition. Es wird unmittelbar klar, dass im allgemeinsten Fall, d.h. ohne einschränkende Bedingung für die Signaleigenschaften, eine Abtastung von Signalen ohne Verlust in der Vollständigkeit der Signalbeschreibung nicht möglich ist. D.h., dass eine vollständige Rekonstruktion des Ursprungssignals $x(t)$ aus dem abgetasteten Signal $x_\mathrm{a}(t)$ im Allgemeinen, d.h. ohne Annahme von Zusatzbedingungen, nicht möglich ist. In dem folgenden Abschnitt werden Signaleigenschaften betrachtet, unter denen eine solche Rekonstruktion unter zusätzlichen Bedingungen gelingt.

## 2.5 Der ideale Abtaster

Der ideale Abtaster für bandbegrenzte Signale muss gemäß dem Abtasttheorem aus dem kontinuierlichen Signal die Folge der Abtastwerte $\{x(nT_a)\}$ liefern. Hierbei ist $T_\mathrm{a}$ die Abtastperiode mit der zugehörigen Abtastfrequenz $f_\mathrm{a} = \frac{1}{T_\mathrm{a}}$ und der Abtastkreisfrequenz $\omega_\mathrm{a} = 2\pi f_\mathrm{a} = \frac{2\pi}{T_\mathrm{a}}$.

In “symbolischer“ Schreibweise lässt sich das abgetastete Signal $x_\mathrm{a}(t)$ darstellen als:

$$x_\mathrm{a}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_\mathrm{a})$$

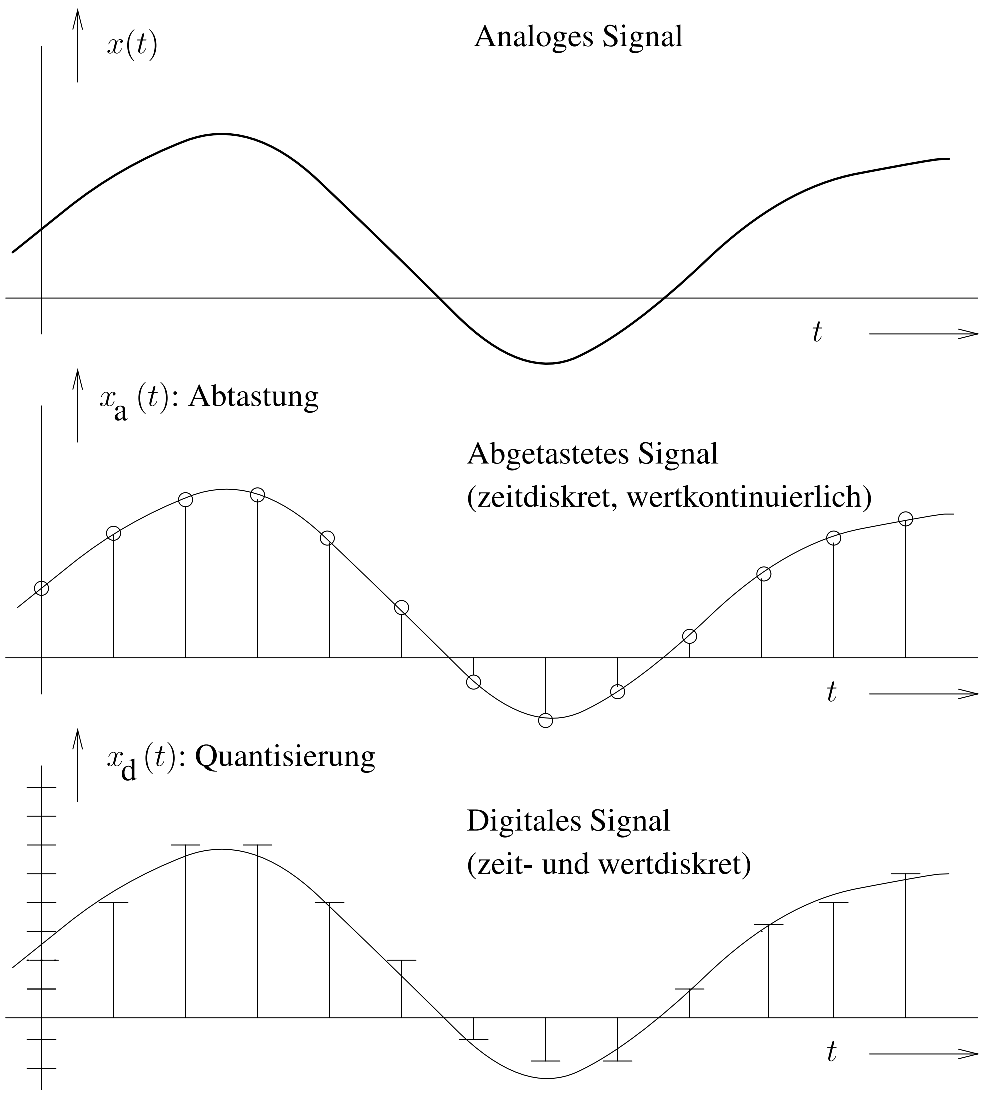


**Bild 5:** Prinzip der Abtastung und Quantisierung analoger Signale

Hieraus erhält man

$$x_{\mathrm{a}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_{\mathrm{a}})\delta(t - nT_{\mathrm{a}}) \tag{17}$$

Im Frequenzbereich gilt nach Fourier-Transformation von $x_{\mathrm{a}}(t)$:

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{a}}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot X(\omega) * \frac{2\pi}{T_{\mathrm{a}}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T_{\mathrm{a}}}) \\ &= \frac{1}{T_a} \cdot X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_{\mathrm{a}}) = \frac{1}{T_{\mathrm{a}}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega - n\omega_{\mathrm{a}}) \end{aligned} \tag{18}$$

Es entsteht eine periodisch fortgesetzte Frequenzfunktion $X_{\mathrm{a}}(\omega)$, deren Summanden

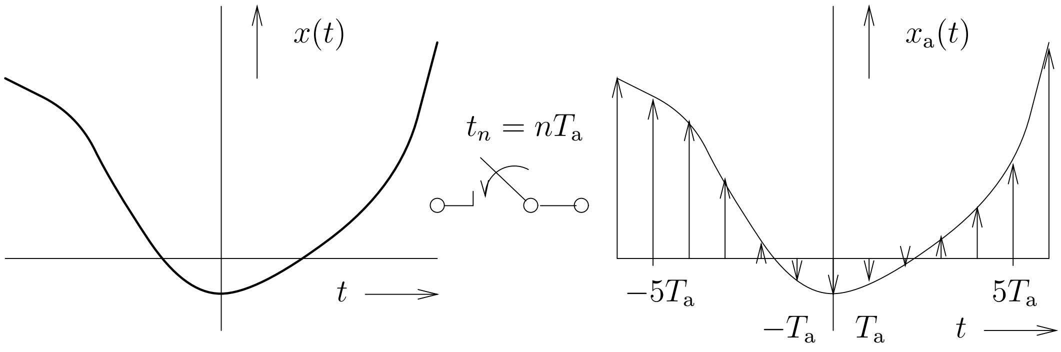


**Bild 6:** "Ideale" Abtastung eines kontinuierlichen Signals

$X(\omega - n\omega_\mathrm{a})$ der Frequenzfunktion $X(\omega)$ des ursprünglichen Signals entsprechen. Das heißt genauer:

**Bei der Abtastung wird das Spektrum $X(\omega)$ des ursprünglichen, analogen Signals mit der Abtastkreisfrequenz $\omega_\mathrm{a}$ periodisch fortgesetzt und mit der Konstanten $\frac{1}{T_\mathrm{a}}$ multipliziert.**

Die Abtastkreisfrequenz $\omega_\mathrm{a}$ bzw. die Abtastperiode $T_\mathrm{a}$ muss in der Regel so bemessen sein, dass sich die einzelnen Summanden in (18) nicht überlappen. Sei $f_\mathrm{g}$ die höchste Frequenz, die im Spektrum $X(\omega)$ des Originalsignals $x(t)$ vorkommt, und $\omega_\mathrm{g} = 2\pi f_\mathrm{g}$ die zugehörige Kreisfrequenz. Dann muss, um sicherzustellen, dass keine Überlappung vorliegt, gelten:

$$\omega_\mathrm{a} \geq 2\omega_\mathrm{g}. \tag{19}$$

Warum es sinnvoll ist, die Überlappung zu vermeiden, wird erst dann deutlich, wenn man versucht, aus dem abgetasteten Signal $x_\mathrm{a}(t)$ das ursprüngliche Signal $x(t)$ wiederherzustellen (siehe weiter unten). Das Gleichheitszeichen in (19) gilt genau dann, wenn mit der sogenannten Nyquistrate $\frac{1}{T_\mathrm{a}} = 2f_\mathrm{g}$ abgetastet wird. Das bedeutet dann, dass sich die Summanden $X(\omega - n\omega_\mathrm{a})$ gerade nicht überlappen.

Die mathematische Rekonstruktion des ursprünglichen Signals $x(t)$ kann nun vorgenommen werden, indem man z.B. **im Frequenzbereich** das Spektrum $X_\mathrm{a}(\omega)$ mit der Übertragungsfunktion

$$H_\mathrm{TP}(\omega) = T_\mathrm{a} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{a}}\right) \tag{20}$$

eines idealen Rekonstruktionstiefpasses multipliziert.

Somit erhält man das ursprüngliche Signal $x(t)$ wieder, indem man bildet:

$$x(t) = x_\mathrm{a}(t) * \mathcal{F}^{-1}\{T_\mathrm{a} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{a}}\right)\}, \tag{21}$$

wobei $\mathcal{F}^{-1}$ die inverse Fourier–Transformation bezeichnet. Führt man diese aus, ergibt sich:

$$x(t) = x_{\mathrm{a}}(t) * 2\mathrm{si}(\omega_{\mathrm{a}} t) \tag{22}$$

Nun ist sofort einzusehen, dass sich die Periodizierung des Spektrums nur dann nach diesem Verfahren rückgängig machen lässt, wenn, wie oben geschrieben, sich die Teilspektren nicht überlappen.

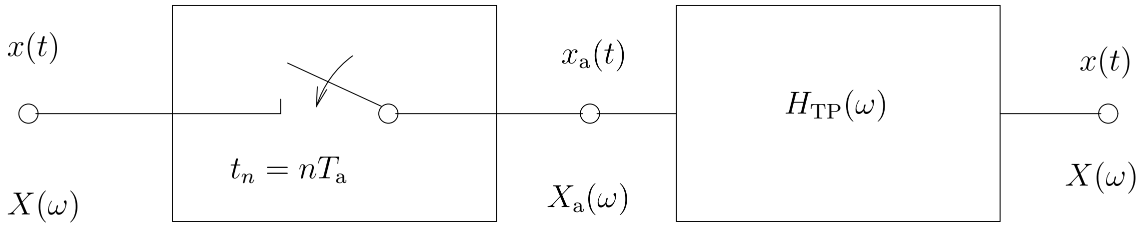


**Bild 7:** Idealer Abtaster mit nachgeschaltetem idealem Rekonstruktionstiefpass

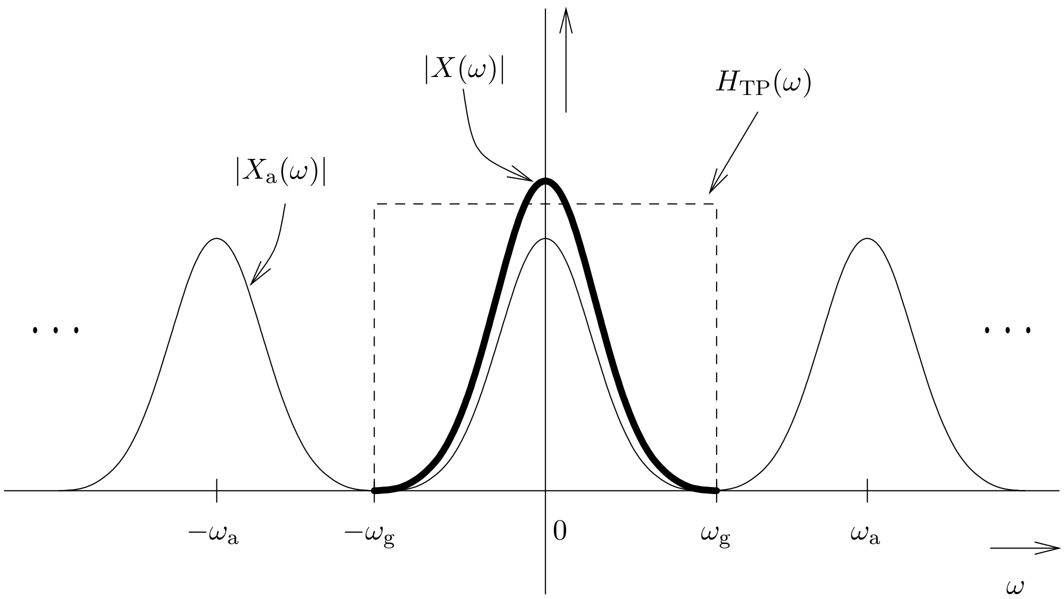


**Bild 8:** Spektralfunktion bei Abtastung mit der Nyquistrate $\frac{1}{T_{\mathrm{a}}} = 2f_{\mathrm{g}}$
$|X_{\mathrm{a}}(\omega)|$ dünne Linie, $|H_{\mathrm{TP}}(\omega)|$ gestrichelt, $|X(\omega)|$ dicke Linie

Wird mit einer höheren als der Nyquistrate $\frac{1}{T_{\mathrm{a}}} > 2f_{\mathrm{g}}$ abgetastet, dann liegt Überabtastung vor, bei der - wie man leicht sieht - das Ursprungssignal ebenso wie bei Abtastung mit der Nyquistrate eindeutig wiedergewonnen werden kann. Wird mit einer niedrigeren als der Nyquistrate $\frac{1}{T_{\mathrm{a}}} < 2 \cdot f_{\mathrm{g}}$ abgetastet, dann liegt Unterabtastung vor. Bei Unterabtastung überlappen sich die Summanden in

$$X_{\mathrm{a}}(\omega) = \frac{1}{T_{\mathrm{a}}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega - n\omega_{\mathrm{a}}) \tag{23}$$

und das Ursprungssignal kann nicht mehr eindeutig wiedergewonnen werden.

Problematisch kann bei der Rückgewinnung des analogen Signals sein, dass der ideale Tiefpass, wie in Gl. (22) erkennbar, nicht kausal ist. Er lässt sich auch nicht durch Zeitverschiebung kausal machen, da seine Stoßantwort bereits im negativen Unendlichen beginnt. Ebenso sind die unendlich steilen Flanken in Frequenzbereich praktisch nicht realisierbar. Das bedeutet, dass man je nach Qualitätsanforderung (z.B. im CD-HiFi-Wiedergabegerät) besondere technische Kniffe wie z.B. Oversampling (Auseinanderziehen der einzelnen Teilspektren durch Einfügen zusätzlicher Abtastwerte im Zeitbereich) benutzt, um mit weniger steilflankigen Tiefpässen auszukommen.

### 2.6 Abtastung von Signalen mit nicht exakt begrenztem Spektrum

Die bisherigen Überlegungen dieses Abschnitts sind von der Voraussetzung ausgegangen, dass die betrachteten Signale ein exakt begrenztes Spektrum mit der Eigenschaft $X(\omega) \equiv 0 \quad \text{für} \quad |\omega| > \omega_{\mathrm{g}}$ haben. Alle nachrichtentragenden Signale haben jedoch in der Praxis endliche Dauer und infolge dessen ein prinzipiell unbegrenztes Spektrum. Es erhebt sich die Frage, bis zu welchem Grade das Abtasttheorem noch anwendbar bleibt. Es lässt sich zeigen, dass für die praktische Anwendung hinreichend kleine Fehler resultieren, wenn

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \quad X(\omega) \sim \left(\frac{1}{\omega}\right)^{\gamma} \quad mit \quad \gamma > 1 \tag{24}$$

d.h., dass die Spektren der betrachteten Signale für $\omega \to \pm\infty$ stärker als mit $\frac{1}{|\omega|}$ abfallen (Beispiel siehe Bild 9).

Selbstverständlich hängt der auftretende Fehler bei der Abtastung solcher Signale stark von der Wahl der Grenzfrequenz $\omega_{\mathrm{g}}$ ab, die in diesem Fall nicht eindeutig festgelegt ist. Die Forderung eines Abfalls stärker als $\frac{1}{|\omega|}$ ist nicht sehr einschränkend. Sie wird von jeder Fouriertransformierbaren Signalfunktion erfüllt, deren 1. Ableitung schon Unstetigkeitsstellen aufweist.

## 3 Funktionsbeschreibung der Hard- und Software

In diesem Praktikumsversuch sollen verschiedene Signalformen mit einem Funktionsgenerator erzeugt und untersucht werden. Die Signale werden dabei an den Line-In-Eingang der Soundkarte eines herkömmlichen PCs angeschlossen. In der Soundkarte werden sie Tiefpass-gefiltert

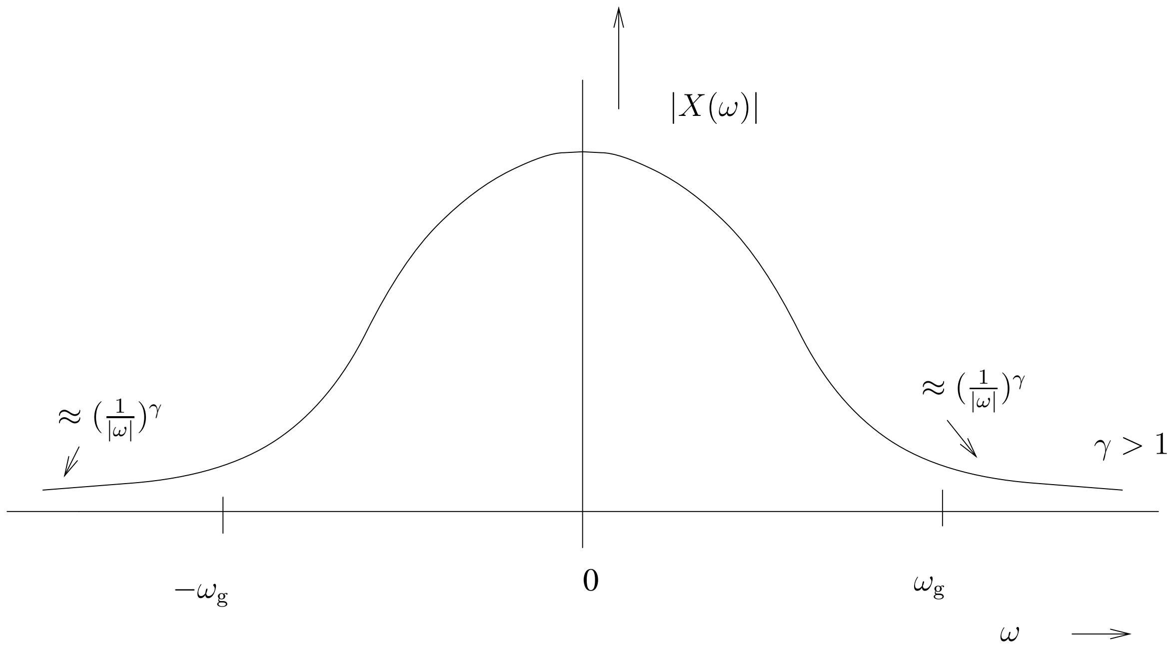


**Bild 9:** Spektrum eines Signals mit nicht exakter Begrenzung auf der $\omega$-Achse

und anschließend A/D-gewandelt. Die entstandene Zahlenfolge kann mit Hilfe vorgefertiger Routinen des Programmiertools Matlab weiterverarbeitet werden.

Zu beachten sind folgende Einschränkungen:

- Der Dynamikbereich des Line-In-Eingangs ist auf -150 mV $\leq U_{\text{in}} \leq$ 150 mV beschränkt. Falls das Eingangssignal diesen Bereich überschreitet, wird es durch den A/D-Wandler irreversibel abgeschnitten (*clipping*).
- Die Abtastrate des A/D-Wandlers beträgt maximal 44100 Werte/s = 44.1 kHz. Folglich können nur Signale mit Frequenzanteilen von ungefähr 20 kHz untersucht werden.
- Die Audio-Kanäle unterdrücken üblicherweise Gleichanteile des Eingangssignals.

Darüber hinaus ist eine Steuerungssoftware mit einer graphischen Benutzeroberfläche, die in Matlab geschrieben wurde, Bestandteil der Versuchsdurchführung. Sie lässt sich über den Befehl „RecordSignal“ aufrufen. Dieses Programm ermöglicht es, Signale wie oben beschrieben aufzuzeichnen. Es ist aber zusätzlich möglich, verschiedene Signalformen wie Sinus-, Rechteck-, Dreieck-, Sweep- und Rauschsignale direkt unter Matlab zu erzeugen oder bereits abgespeicherte Audio-Signale zu laden.

# 4 Vorbereitungsaufgaben

Die Vorbereitungsaufgaben sind von allen Seminarteilnehmern vor dem Seminartermin zu bearbeiten. Es wird zwar nicht erwartet, dass Sie die vollständigen Lösungen zum Seminartermin mitbringen, doch sollten Sie während des Seminars die Rechenwege bzw. die auftretenden Probleme und Unklarheiten an der Tafel vorstellen können. Schwierigkeiten hinsichtlich der Rechenwege werden während des Seminartermins behandelt.

1. Nennen Sie Beispiele für folgende Signale:
   - wert- und zeitkontinuierliches Signal,
   - wertkontinuierliches und zeitdiskretes Signal,
   - wertdiskretes und zeitkontinuierliches Signal,
   - wert- und zeitdiskretes Signal.

2. Entscheiden Sie , ob es sich bei den folgenden Signalen $x(t)$ um Energie- oder Leistungssignale handelt und berechnen Sie gegebenenfalls die Energie bzw. die Leistung:

   ($U, T_0$ und $f$ sind konstante Größen)

$$x_1(t) = \begin{cases} U & \text{für} \quad -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} U\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_0}} & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

$$x_3(t) = U \sin(2\pi f t)$$

   Hinweis: $\int \sin^2(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin(2ax) + c$

$$x_4(t) = U \qquad \text{für} \ -\infty < t < +\infty$$

3. Gegeben sei eine reelle gerade periodische Funktion, die als reelle oder komplexe Fourier–Reihe darzustellen ist.

   3.1 Wie groß ist $\Im\{\underline{c}_n\}$ in diesem Fall?

   3.2 Wie groß können die Koeffizienten $b_n$ sein?

4. Gegeben sei nun eine reelle ungerade periodische Funktion, die als reelle oder komplexe Fourier–Reihe darzustellen ist.

4.1 Wie groß kann der Gleichanteil $c_0$ einer solchen Funktion sein?

4.2 Kann eine solche Funktion durch Funktionen des Typs $\cos(n\omega_0 t)$ dargestellt werden?

5. Berechnen und skizzieren Sie die Spektren der folgenden Funktionen:

5.1 $x_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

5.2 $x_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(\omega_1 t), \qquad T >> \frac{2\pi}{\omega_1}$

5.3 $x_3(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0), \qquad 0 < T < T_0$

5.4 $x_4(t) = \left[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)\right]\cos(\omega_1 t), \qquad 0 < T < T_0, \quad T >> \frac{2\pi}{\omega_1}$

6. Wie hängen die Koeffizienten der reellen Fourier–Reihe mit denen der komplexen Fourier–Reihe zusammen?

7. Wie hängen Fourier–Reihe und Fourier–Transformierte zusammen?

8. Berechnen und skizzieren Sie die Linienspektren der periodischen Funktionen in Bild 2 jeweils als reelle und als komplexe Fourier–Reihe.

9. Berechnen und skizzieren Sie folgende Signale, einmal kontinuierlich und einmal abgetastet mit der Abtastperiode $T_\text{a}$ nach folgendem Schema:
$x(t)$ gegeben.
$x_\text{a}(t) = [x(t)$ abgetastet mit idealem Abtaster mit Abtastperiode $T_\text{a}]$.
$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$.
$X_\text{a}(\omega) = \mathcal{F}\{x_\text{a}(t)\}$.
Geben Sie jeweils an, wie groß bzw. klein $T_\text{a}$ mindestens sein muss, damit aus dem abgestasteten Signal das ursprüngliche Signal wiederhergestellt werden kann. Erläutern Sie gegebenenfalls, was passiert, wenn zu langsam abgetastet wird.
Führen Sie diese Rechnungen und Überlegungen für folgende Signale aus:

9.1 $x(t) = \text{si}(\omega_1 t)$

9.2 $x(t) = \cos(\omega_1 t)$

9.3 $x(t) = \left[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)\right]\cos(\omega_1 t), \qquad 0 < T < T_0, \quad T >> \frac{2\pi}{\omega_1}$

# 5 Messaufgaben

1. Stellen Sie folgende Signale im Zeit- und Frequenzbereich dar, und geben Sie wesentliche Größen dieser Signale an. Tasten Sie dabei mit unterschiedlichen Raten ab, und diskutieren Sie Vor- und Nachteile in Bezug auf die gewählte Abtastrate.

   - Sinusschwingung
   - Sägezahnschwingung
   - Rechteckfolge

2. Wie können Sie mit dem Messsystem einen einzelnen Rechteckimpuls ausmessen? Stellen Sie das Spektrum dar und interpretieren Sie es.

3. Messen und interpretieren Sie den Betrag des Amplitudenspektrums eines periodischen Schwingungsimpulses:

$$x(t) = A_{\text{eff}} \cos(2\pi f_i t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}(\frac{t - nT_0}{T_i}) \tag{25}$$

   ($T_i = 0,25\text{ms}$; $T_0 = 1\text{ms}$; $A_{\text{eff}} = 1\text{V}$; Schwingungsfrequenz $f_i = 20\text{kHz}$)

4. Analysieren Sie ein vorgegebenes Sprachsignal im Frequenzbereich zwischen $5\text{Hz}$ und $5\text{kHz}$.

5. Untersuchen Sie die vorgefertigte Signaltypen, die im Matlab-Programm zur Verfügung gestellt werden, im Zeit- und Frequenzbereich. Variieren Sie auch dabei die Länge der FFT.

# Literatur


[1] CZYLWIK A., *Nachrichtentechnische Systeme 1*, Folien zur gleichnamigen Vorlesung an der Universität Duisburg–Essen

[2] CZYLWIK A., *Nachrichtentechnische Systeme 2*, Folien zur gleichnamigen Vorlesung an der Universität Duisburg–Essen

[3] WILLMS I., *Grundlagen der Informationstechnik*, Scriptum zur gleichnamigen Vorlesung an der Universität Duisburg–Essen

[4] WILLMS I., *Signals and Systems*, Scriptum zur gleichnamigen Vorlesung an der Universität Duisburg–Essen

[5] KAISER T., *Transmission and Modulation*, Scriptum zur gleichnamigen Vorlesung an der Universität Duisburg–Essen

[6] LUCK H., *Theoretische Grundlagen der Nachrichtentechnik*, Scriptum zur gleichnamigen Vorlesung an der Universität Duisburg–Essen

[7] LUCK H., *Information Engineering*, Scriptum zur gleichnamigen Vorlesung an der Universität Duisburg–Essen

[8] DIN, *Normen für Größen und Einheiten in Naturwissenschaft und Technik*, AEF-Taschenbuch 22, Beuth 1974

[9] LÜKE H.D., *Signalübertragung*, Springer-Verlag, 1975

[10] FRITZSCHE, G., *Theoretische Grundlagen der Nachrichtentechnik (Abschnitt 1.1)*, VEB-Verlag Technik, Berlin 1972

[11] FISCHER, F.A., *Einführung in die statistische Signalübertragungstheorie (Kapitel I, ğ2 & ğ3)*, BI-Taschenbuch 130/130a, Bibliographisches Institut Mannheim 1969