

Seminar Praktikum "Communications 1"	
Seminarversuch 3 "Digitale Filter"	
Fachgebiet: Nachrichtentechnische Systeme	
Name:	Matr.-Nr.:
Betreuer:	Datum:



**Die Vorbereitungsaufgaben müssen vor dem Seminartermin gelöst werden.**

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Hinweise zum Referat</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Der ideale Abtaster . . . . .	3
2.2	Die $\mathcal{Z}$ -Transformation zeitdiskreter Signale . . . . .	4
2.3	Die Abbildung $z = e^{pT_a}$ . . . . .	6
2.4	Die bilineare Transformation . . . . .	7
2.5	Das digitale Filter . . . . .	9
2.5.1	Die Differenzgleichung . . . . .	9
2.5.2	Die erste kanonische Form eines digitalen Filters. . . . .	10
2.6	Die Stabilität von Übertragungssystemen . . . . .	11
2.7	Entwurf von Filtern . . . . .	11
2.7.1	Berechnung der Koeffizienten eines FIR-Filters . . . . .	11
2.7.2	Berechnung der Koeffizienten eines IIR-Filters . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Vorbereitungsaufgaben</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>17</b>
	<b>Literatur</b>	<b>18</b>

## 0 Hinweise zum Referat

Zu Beginn des Seminars soll einer oder mehrere der für das einführende Referat verantwortlichen Studenten einen Kurzvortrag von ca. 15-20 Minuten halten, in dem die wesentlichen Aussagen zu diesem Thema zusammengefasst dargestellt werden.

Die Präsentation ist **vor** Seminarbeginn vorzubereiten. Die hierfür nötigen Hilfsmittel (Folien, Overheadprojektor) werden zur Verfügung gestellt.

**Sie können diesen Kurzvortrag entweder handschriftlich auf dem Overheadprojektor oder mit selbstgefertigten Folien vortragen oder auf einen Satz vorgefertigter Folien zurückgreifen, die beim Versuchsbetreuer als Folien verfügbar sind und auf unseren Internetseiten als pdf-Dateien zur Verfügung stehen!**

# 1 Einleitung

Im Gegensatz zu herkömmlichen *kontinuierlichen* nachrichtentechnischen Systemen werden in der *digitalen Signalverarbeitung* die Signale nicht als *physikalische Größen*, sondern als *Zahlenfolgen* dargestellt. *Digitale Filter* sind eine Teilmenge der Systeme zur digitalen Signalverarbeitung und basieren auf arithmetischen Operationen der Zahlenfolgen. In den Anfängen der digitalen Signalverarbeitung wurden digitale Filter ausschließlich zur Simulation und als Ersatz analoger Schaltungen verwendet. Mittlerweile jedoch gibt es eine Vielzahl ausschließlich digitaler Systeme und Signale, wie z.B. digitale Musikaufzeichnungsverfahren (Compact Disk), digitales Fernsehen, oder auch Prognoseverfahren für als Zahlenfolgen darstellbare Aktienkurse.

Die Verfügbarkeit kostengünstiger mikroelektronischer Bauelemente, insbesondere von Mikro- und Signalprozessoren, erlaubt es mittlerweile, eine *gewünschte analoge Übertragungsfunktion* (ÜTF) unter Verwendung eines digitalen Filters zu realisieren. Durch die weitgehende Unabhängigkeit digitaler Filter von Bauteiltoleranzen, Alterungserscheinungen und Temperaturschwankungen liegen die Vorzüge nicht nur in der höheren Genauigkeit und Reproduzierbarkeit, sondern auch in der geringeren Störanfälligkeit. Außerdem läßt sich die ÜTF in einfacher Weise durch Variation der Filterkoeffizienten verändern, was bei der Filterentwicklung von großem Vorteil ist. Die Nachteile liegen in dem höheren schaltungstechnischen Aufwand, der aber mit der zunehmenden Integration der verwendeten Rechnerbausteine (z.B. Digitale Signalprozessoren (DSP)) immer weniger ins Gewicht fällt.

Nach einer Frequenzbandbegrenzung mit einem Anti-Aliasing Tiefpaßfilter mit der analogen Übertragungsfunktion

$$H_{T1}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird das *wert- und zeitkontinuierliche* Signal  $s(t)$  mit der Abtastperiode  $T_a$  zeitlich äquidistant ideal abgetastet. Das Halteglied mit der Impulsantwort

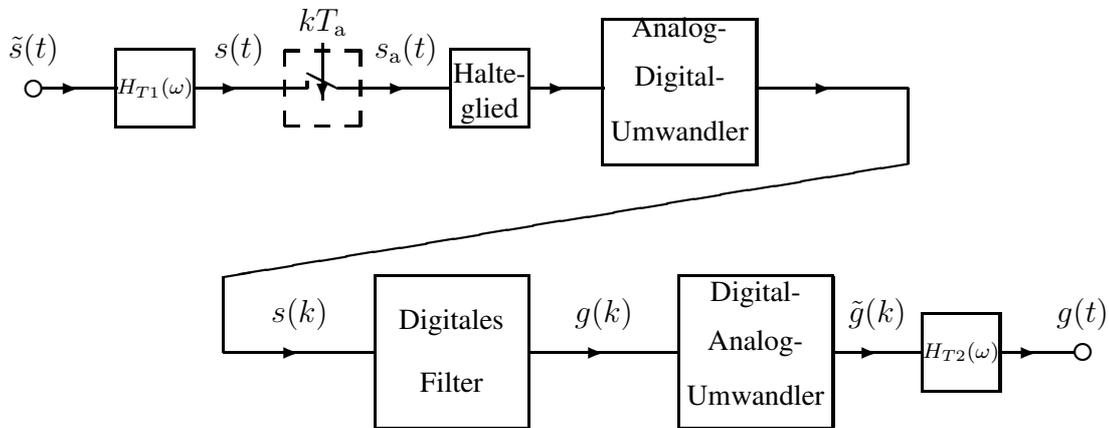
$$h_{\text{Halte}}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

stellt in Verbindung mit dem idealen Abtaster ein sogenanntes *Sample & Hold*-System dar. Der nachgeschaltete Analog-Digital-Umwandler (ADU) liefert dann das *wert- und zeitdiskrete* Signal  $s(k)$ . Dieses Signal wird in dem digitalen Filter durch einen vorgegebenen Rechenalgorithmus in ein wert- und zeitdiskretes Ausgangssignal  $g(k)$  überführt.  $g(k)$  wird anschließend durch einen Digital-Analog-Umwandler (DAU) in ein *wertdiskretes- und zeitkontinuierliches* Signal  $\tilde{g}(t)$  umgesetzt. Der nachgeschaltete ideale Rekonstruktionstiefpaß mit der *analogen*

Übertragungsfunktion

$$H_{T_2}(\omega) = \begin{cases} T_a & |\omega| \leq \pi/T_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

liefert dann das *wert- und zeitkontinuierliche* Signal  $g(t)$ .

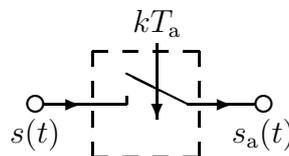


**Bild 1:** Digitales Filter in analoger Umgebung

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Der ideale Abtaster

Ein wert- und zeitkontinuierliches Signal  $s(t)$ , dessen Spektrum  $S(\omega)$  mit der Grenzfrequenz  $\omega_s$  frequenzbandbegrenzt ist, wird durch einen *idealen Abtaster* (Bild 2) mit der Abtastperiode  $T_a = 2\pi/\omega_a$  in ein Signal  $s_a(t)$  überführt.



**Bild 2:** Idealer Abtaster.

Für den dargestellten idealen Abtaster gilt die Beziehung

$$s_a(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_a) \delta(t - kT_a). \quad (1)$$

Der ideale Abtaster wandelt ein Signal  $s(t)$  in eine Folge von gewichteten, zeitlich äquidistanten Dirac-Stößen mit den Wichtungsfaktoren  $s(kT_a)$  um. Die Fouriertransformation der Gleichung (1) ergibt

$$S_a(\omega) = \mathcal{F} \left\{ s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a) \right\} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} S(\omega) * \frac{2\pi}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_a}\right) \quad (3)$$

$$= \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_a}\right) = \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_a). \quad (4)$$

Die Bilder 3 und 4 veranschaulichen die Zusammenhänge im Frequenzbereich für ein reelles Spektrum und  $\omega_a > 2\omega_s$ .

Wird das abgetastete Signal  $s_a(t)$  mit einem idealen Tiefpaß mit der Grenzfrequenz  $\omega_g = \omega_a/2$  gefiltert, so wird  $s(t)$  bis auf einen konstanten Faktor rekonstruiert. Im Frequenzbereich bedeutet dies die Multiplikation von  $S_a(\omega)$  mit der ÜTF des idealen Tiefpasses

$$\begin{aligned} S_{a,TP}(\omega) &= S_a(\omega) H_{TP}(\omega) \\ &= \left[ \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_a) \right] H_0 \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right) \\ &= \frac{H_0}{T_a} S(\omega) \end{aligned} \quad (5)$$

Bild 5 veranschaulicht die Filterung im Spektralbereich.

## 2.2 Die $\mathcal{Z}$ -Transformation zeitdiskreter Signale

Die Anwendung der Laplace-Transformation auf das kausale, abgetastete Signal  $s_a(t)$  nach (1) ergibt

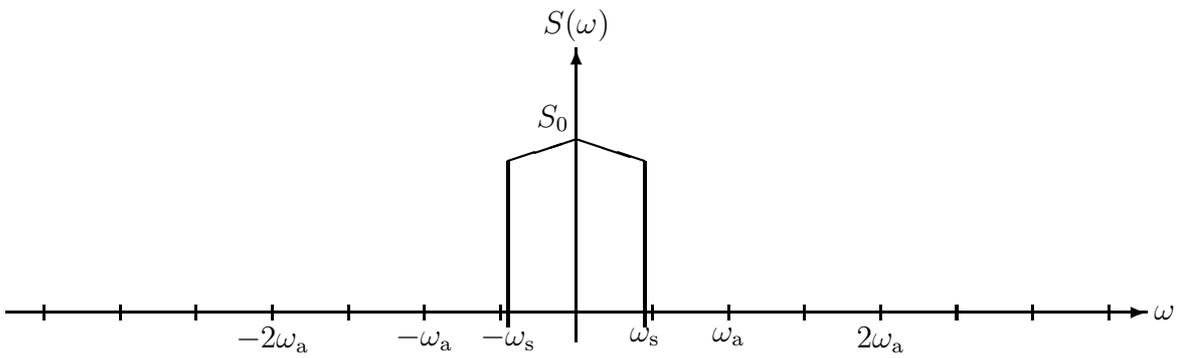
$$S_{a,L}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} s(kT_a) e^{-pkT_a}. \quad (6)$$

Mit der Kurzschreibweise  $s(k)$  für  $s(kT_a)$  und der Abbildung  $z = e^{pT_a}$  gilt

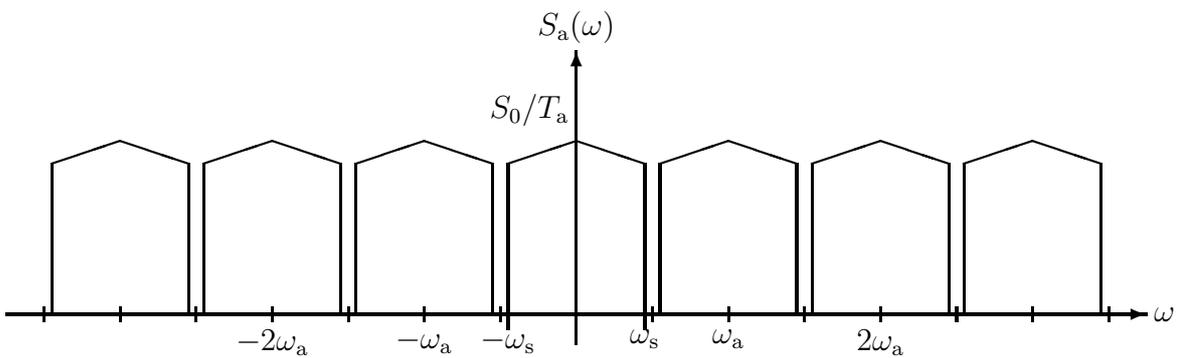
$$S_Z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k) z^{-k} \quad \text{mit} \quad S_{a,L}(p) = S_Z\left(z = e^{pT_a}\right). \quad (7)$$

Die Funktion  $S_Z(z)$  wird als  $\mathcal{Z}$ -Transformierte von  $s(k)$  bezeichnet. Falls die Laplace-Transformierte  $S_L(p)$  bzw.  $S_{a,L}(p)$  nur Pole in der linken offenen Halbebene hat, gilt [6]

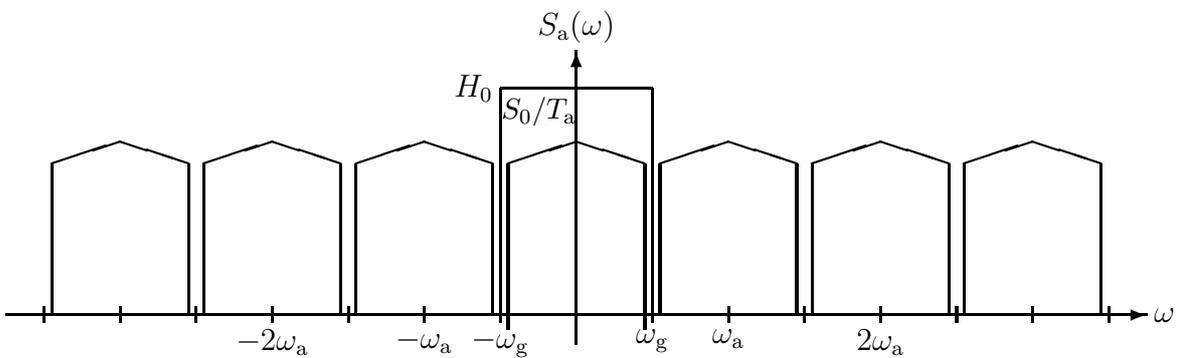
$$S_F(\omega) = S_L(p = j\omega) \quad \text{bzw.} \quad S_{a,F}(\omega) = S_{a,L}(p = j\omega). \quad (8)$$



**Bild 3:** Spektrum  $S(\omega)$  des frequenzbandbegrenzten Signals  $s(t)$ .



**Bild 4:** Spektrum  $S_a(\omega)$  des abgetasteten Signals  $s_a(t)$ .



**Bild 5:** Rückgewinnung des Spektrums  $S(\omega)$  durch einen idealen Tiefpaß.

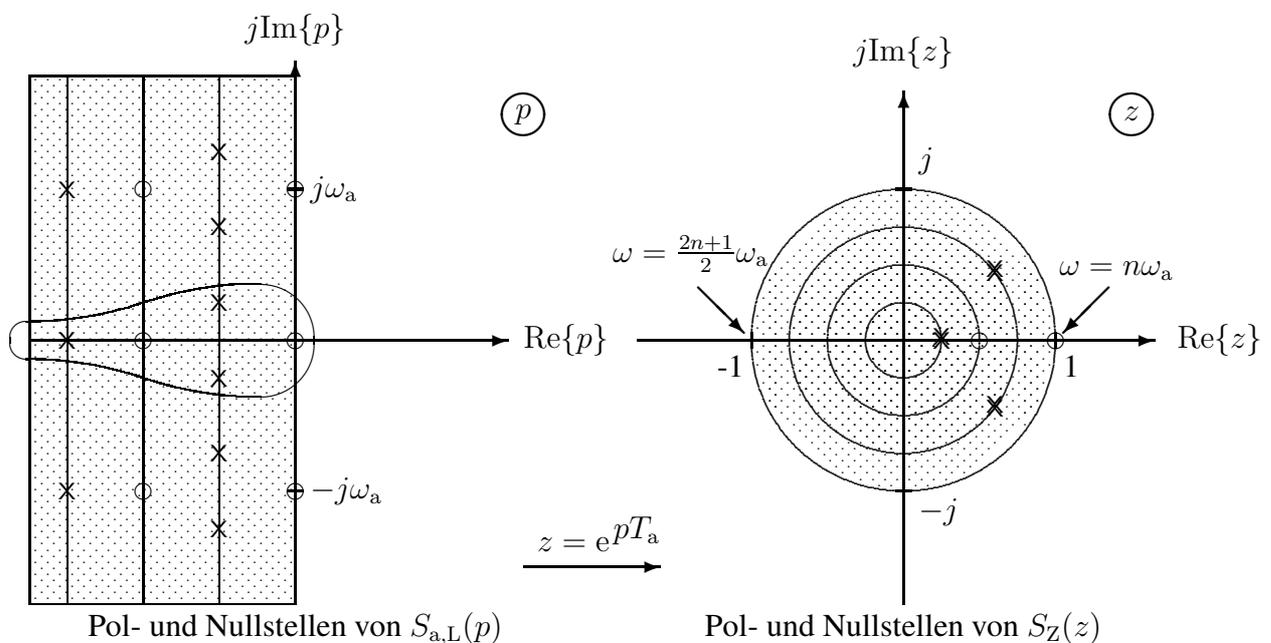
Es folgt, daß unter der genannten Voraussetzung aus der  $\mathcal{Z}$ -Transformierten von  $s(k)$  die zugeordnete Fouriertransformierte  $S_{a,F}(\omega)$  berechnet werden kann.

$$S_{a,F}(\omega) = S_{a,L}(p = j\omega) = S_Z \left( z = e^{j\omega T_a} \right). \quad (9)$$

## 2.3 Die Abbildung $z = e^{pT_a}$

Für den Entwurf eines digitalen Filters wird i.a. versucht auf Entwurfsmethoden aus der Analogtechnik zurückzugreifen. Diese Entwurfsmethoden beruhen im wesentlichen auf der Beschreibung analoger Systeme durch die Systemfunktion  $H_L(p)$  [13, 14]. Durch Übertragung der Lösungen aus dem  $p$ -Bereich in den  $z$ -Bereich wird das Entwurfsproblem für zeitdiskrete Systeme gelöst. Eine andere Methode beruht auf der Übertragung einer im  $z$ -Bereich gestellten Aufgabe in den  $p$ -Bereich, in dem mit bekannten Verfahren eine Lösung gesucht wird. Die gefundene Lösung wird anschließend wieder in den  $z$ -Bereich zurücktransformiert.

Zur Anwendung dieser Methode ist eine i.a. *eindeutige* Transformation zwischen der  $p$ -Ebene und der  $z$ -Ebene erforderlich. Das heißt, das auch die Transformation von der  $z$ -Ebene in die  $p$ -Ebene eindeutig sein muß. Ferner sollen zur einfachen und exakten Realisierung des analogen bzw. des zeitdiskreten Systems die ÜTFen *rational* in  $p$  und in  $z$  sein.



**Bild 6:** Pol- und Nullstellen-Diagramm der Laplace-Transformierten  $S_{a,L}(p)$  und der zugeordneten  $Z$ -Transformierten  $S_Z(z)$ . Der umkreiste Bereich der  $p$ -Ebene enthält die Pol- und Nullstellen von  $S_L(p)$ .

Die Abbildung der komplexen  $p$ -Ebene durch  $z = e^{pT_a}$  auf die  $z$ -Ebene ist keine umkehrbar eindeutige Abbildung. Betrachten wir dazu zunächst die in Bild 6 dargestellte umrahmte Pol- und Nullstellenkonfiguration, bestehend aus 3 Polstellen und 2 Nullstellen. Durch die Abbildung  $z = e^{pT_a} = e^{\sigma T_a} e^{j\omega T_a}$ ,  $p = \sigma + j\omega$ , wird die imaginäre Achse ( $\sigma = 0$ ) auf den Einheitskreis  $z|_{\sigma=0} = e^{j\omega T_a} \stackrel{\text{def}}{=} e^{j\Omega}$  und die linke offene  $p$ -Halbebene ( $\sigma < 0$ ) auf das Innere

des Einheitskreises abgebildet. Nun läßt sich aber  $z = e^{pT_a}$  auch schreiben als

$$\begin{aligned} z &= e^{\sigma T_a} e^{j\omega T_a} \\ &= e^{\sigma T_a} e^{j(\omega T_a + 2n\pi)} \\ &= e^{\sigma T_a} e^{j(\omega + n\omega_a)T_a}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Eine gegebene Pol- und Nullstellenkonfiguration in der  $z$ -Ebene führt also zu unendlich vielen Pol- und Nullstellenkonfigurationen in der  $p$ -Ebene. Somit ist die Abbildung  $z = e^{pT_a}$  *nicht umkehrbar eindeutig*.

## 2.4 Die bilineare Transformation

Häufig erfolgt der Entwurf analoger Filter unter Verwendung der normierten Systemfunktion  $H(P) = H_L(p = P\omega_g)$  bzw. normierten Übertragungsfunktion  $H(F) = H_F(\omega = 2\pi F f_g)$ . Dabei wird üblicherweise auf die Grenzfrequenz  $f_g$  normiert; dann ist  $P = p/\omega_g$  und  $F = f/f_g$ . Die sog. *bilineare Transformation* ist dann definiert als [1, 8, 13, 14]

$$z = \frac{1+P}{1-P}, \quad P = \frac{z-1}{z+1}. \quad (10)$$

Diese Transformation bildet die linke, offene  $P$ -Halbebene auf das Innere des Einheitskreises in der  $z$ -Ebene und die  $j\omega/\omega_g$ -Achse der  $P$ -Ebene auf den Einheitskreis  $z = e^{j\Omega}$  ab. Dabei wird  $P = \pm\infty$  auf den Punkt  $z = -1$ , der Punkt  $P = 0$  auf den Punkt  $z = +1$  abgebildet. Bild 7 zeigt die Abbildungseigenschaften der bilinearen Transformation.

Offenbar ist bei der bilinearen Transformation die Abbildung nicht nur *eineindeutig*, sondern führt auch stets von einer rationalen Funktion in  $P$  auf eine rationale Funktion in  $z$  und umgekehrt.

Anstelle von Gleichung (10) wird auch eine modifizierte bilineare Transformation [2]

$$z = e^{pT_a} \approx \frac{1 + p\frac{T_a}{2}}{1 - p\frac{T_a}{2}} = z_B, \quad p = \frac{2}{T_a} \frac{z_B - 1}{z_B + 1} \quad (11)$$

verwendet.

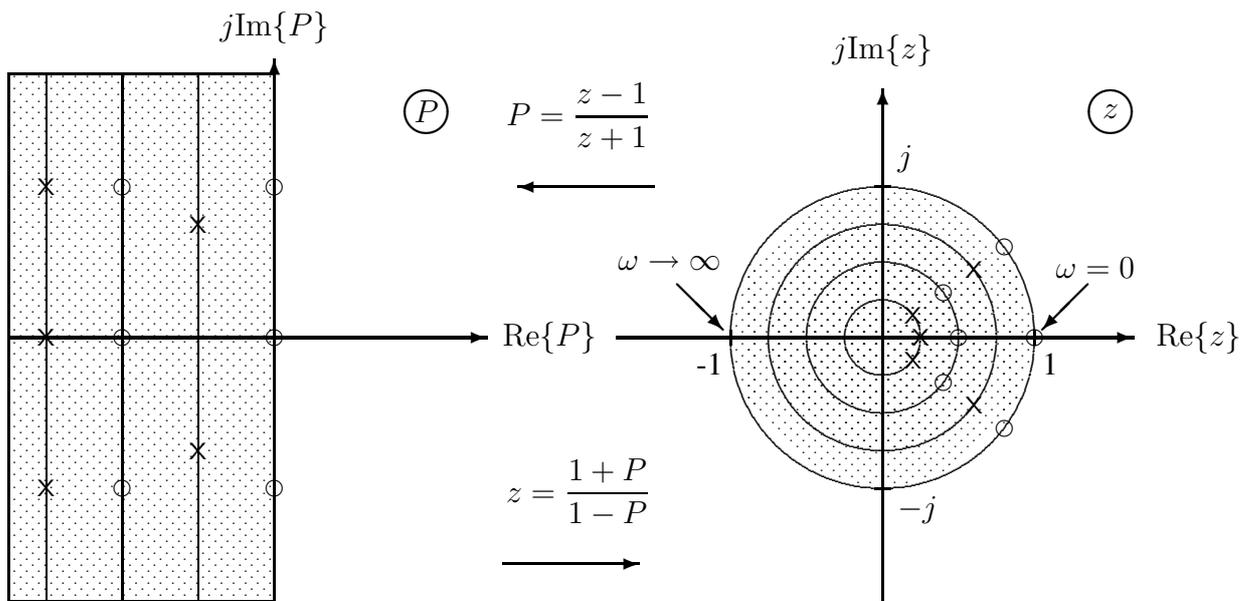
Einsetzen von  $p$  nach Gleichung (11) in  $H_L(p)$ , der Systemfunktion eines analogen Systems, ergibt  $H_Z(z)$ , die Systemfunktion des zugeordneten diskreten Systems.

Durch den Ansatz

$$e^{j\Omega} = \frac{1 + \frac{T_a}{2}j\omega}{1 - \frac{T_a}{2}j\omega} \quad (12)$$

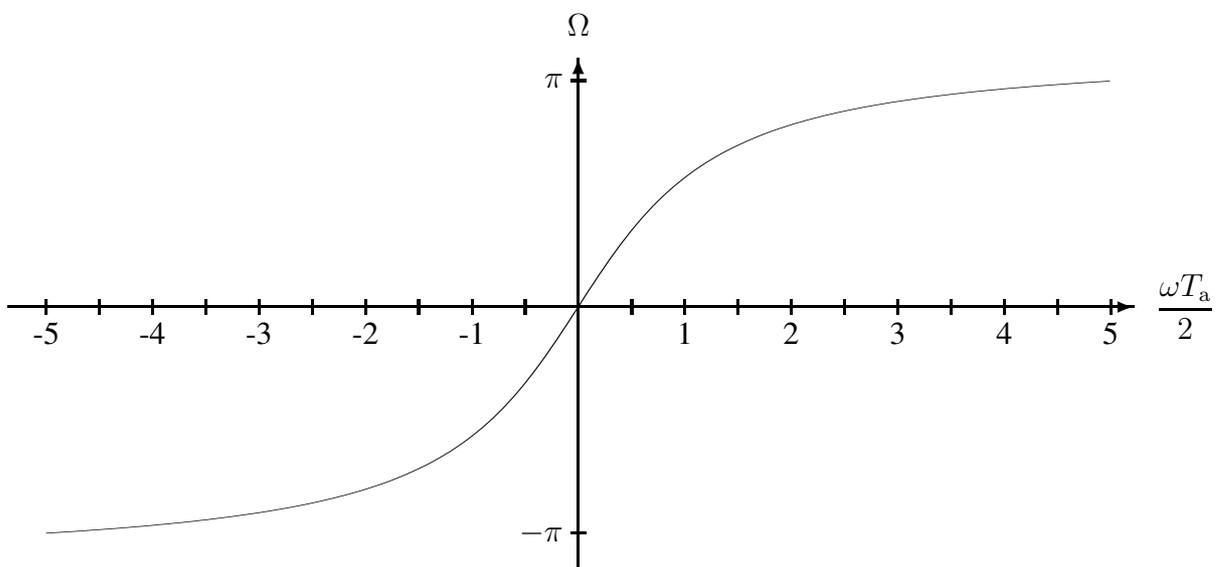
läßt sich zeigen, daß die bilineare Transformation den Frequenzgang gemäß

$$\Omega = 2\arctan\left(\frac{\omega T_a}{2}\right) \quad (13)$$



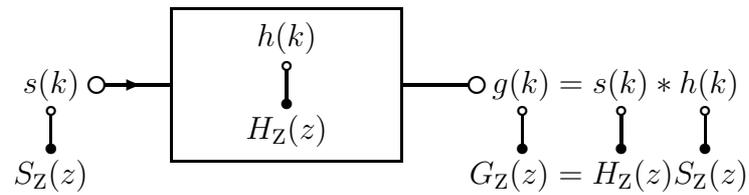
**Bild 7:** Eineindeutige Abbildung zwischen  $P$  und  $z$ -Ebene durch die bilineare Transformation.

verzerrt (Bild 8), d.h. der Frequenzbereich des analogen Systems  $-\infty < \omega < +\infty$  wird durch die bilineare Transformation auf den Frequenzbereich des diskreten Systems  $-\pi < \Omega < \pi$  bzw. abgebildet (Bild 8).



**Bild 8:** Transformation der Kreisfrequenz  $\omega$  eines analogen Systems in die Kreisfrequenz  $\Omega$  eines digitalen Systems bei der bilinearen Transformation.

## 2.5 Das digitale Filter



**Bild 9:** Lineares, zeitinvariantes und kausales, diskretes Filter.

Ein System nach Bild 9, das eine zeitdiskrete, wertkontinuierliche Folge  $\{s(k)\}$  mit unendlicher Genauigkeit verarbeitet, wird *diskretes System* bzw. diskretes Filter genannt. Bei praktisch auftretenden Gegebenheiten wird ein gewünschtes Filter oft durch *digitale*, also *wertdiskrete* Berechnungen realisiert. Aus diesem Grund ist es allgemein üblich geworden, die zeitdiskreten Filter als *digitale Filter* oder kurz *Digitalfilter* zu bezeichnen, obwohl die zugrundeliegende Technik des Entwurfs sich meist nur auf die zeitdiskrete Natur der Signale und Systeme bezieht.

Der Ausdruck

$$g(k) = \sum_{\nu=0}^k s(\nu)h(k-\nu) = \sum_{\nu=0}^k h(\nu)s(k-\nu) \quad (14)$$

$$= s(k) * h(k) = h(k) * s(k) \quad (15)$$

wird für kausale Systeme und Signale  $s(k)$  in Anlehnung an analoge Systeme als diskretes Faltungsprodukt bezeichnet.  $h(k)$  ist dabei die Impulsantwort des diskreten Systems.  $H_Z(z)$  in Bild 9 ist die zugehörige Übertragungsfunktion des diskreten Systems. Die Faltung im Zeitbereich  $s(k) * h(k)$  ergibt das Produkt der  $\mathcal{Z}$ -Transformierten  $S_Z(z)H_Z(z)$ . All dies entspricht den prinzipiellen Zusammenhängen bei analogen Systemen.

### 2.5.1 Die Differenzengleichung und die Beziehung zur Übertragungsfunktion $H_Z(z)$

Die folgende *Differenzengleichung*

$$g(k) = \sum_{n=0}^N a_n s(k-n) - \sum_{m=1}^M b_m g(k-m) \quad , \quad N, M \in N_0 \quad (16)$$

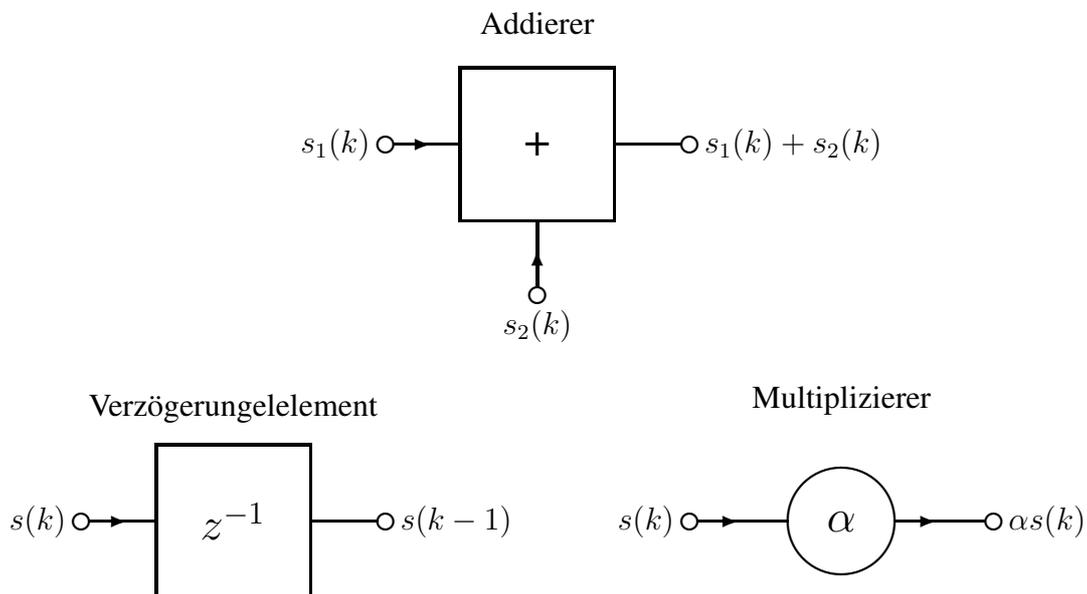
kann durch ein zeitdiskretes, lineares, zeitinvariantes und kausales System realisiert werden. Offenbar hängt der aktuelle Ausgangswert  $g(k)$  nur von den aktuellen Eingangswert  $s(k)$  und vergangenen Ein- und Ausgangswerten  $s(k-i)$  bzw.  $g(k-i)$  ab. Durch Anwendung der  $\mathcal{Z}$ -

Transformation auf Gleichung (16) ergibt sich die ÜTF  $H_Z(z)$  zu

$$H_Z(z) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}, \quad b_0 = 1. \quad (17)$$

### 2.5.2 Die erste kanonische Form eines digitalen Filters.

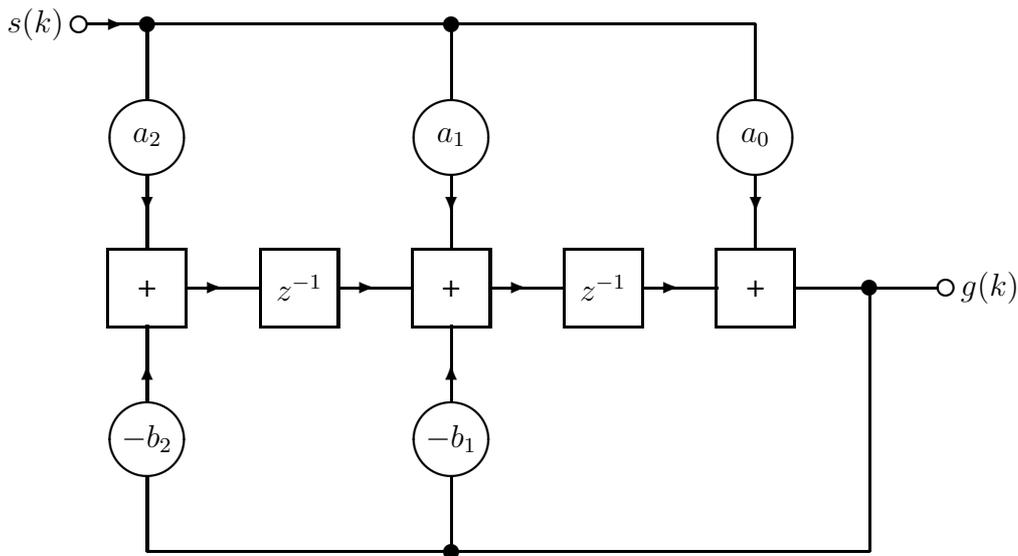
Ein digitales Filter ist nach [7, 14] aus folgenden drei Grundelementen aufgebaut:



**Bild 10:** Grundelemente eines digitalen Filters

Mit diesen Grundelementen ergibt sich dann beispielsweise für ein digitales Filter zweiter Ordnung ( $N = M = 2$ ) der in Bild 11 dargestellte Signalflußgraph.

Sind die Koeffizienten  $b_1$  und  $b_2$  gleich Null, so liegt ein nichtrekursives Filter vor, da dann keine Rückkopplung des Ausgangs auf den Eingang vorliegt. Die Impulsantwort eines solchen Filters hat eine zeitlich begrenzte Dauer (für das Filter in Bild 11:  $2T_a$ ). Deshalb wird ein nichtrekursives Filter auch als FIR-Filter (**F**inite **I**mpulse **R**esponse) bezeichnet. Dem gegenüber hat ein rückgekoppeltes Filter (mindestens ein Koeffizient  $b_i$  verschieden von Null) eine i.a. theoretisch zeitlich unbegrenzte Impulsantwort. Ein solches Filter wird daher als IIR-Filter (**I**nfinite **I**mpulse **R**esponse) bezeichnet.



**Bild 11:** Erste kanonische Form eines digitalen Filters zweiter Ordnung.

## 2.6 Die Stabilität von Übertragungssystemen

Ein *zeitdiskretes* System ist *stabil*, wenn es für ein beliebiges aber beschränktes Eingangssignal  $|s(k)| < L_1 < \infty$ ,  $L_1 \in \mathbb{R}^+$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ein beschränktes Ausgangssignal  $|g(k)| < L_2 < \infty$ ,  $L_2 \in \mathbb{R}^+$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  erzeugt [7]. Hinreichend und notwendig für die Stabilität eines kausalen, zeitdiskreten Systems ist, daß alle Polstellen  $z_{\infty,\nu}$  der ÜTF  $H_Z(z)$  innerhalb des Einheitskreises in der  $z$ -Ebene liegen

$$|z_{\infty,\nu}| < 1 \quad \forall \nu. \quad (18)$$

*Mehrfache Pole* auf dem Einheitskreis führen zu *instabilen* Systemen. *Einfache Pole* auf dem Einheitskreis führen zu sogenannten *bedingt stabilen* Systemen, wenn alle anderen Polstellen im Innern des Einheitskreises liegen. Solche bedingt stabilen Systeme sind durch eine Impulsantwort gekennzeichnet, deren Werte für  $k \Rightarrow \infty$  nicht gegen Null gehen (Beispiel:  $N = 0$ ,  $M = 1$ ,  $z_{\infty,1} = 1 \rightarrow h(k) = 1 \forall k \geq 0$ ) [12].

## 2.7 Entwurf von Filtern

### 2.7.1 Berechnung der Koeffizienten eines FIR-Filters

Es gibt verschiedene Methoden, um die Filterkoeffizienten von FIR-Filtern zu berechnen. Die anschaulichste Methode ist die Fenster-Methode [1, 8, 13, 14], weil sie ein einfaches Verständnis der Wirkungsweise ermöglicht und gleichzeitig weniger rechenintensiv ist als andere Methoden, wie zum Beispiel der „Remez-Exchange-Algorithmus“ [8].

Ausgangspunkt für den Entwurf eines FIR-Filters mit der Fenster-Methode ist eine vorzugebene Filterordnung  $N$  und ein Wunschfrequenzgang  $H_w(F)$ . Zur Berechnung der Koeffizienten wird die Tatsache ausgenutzt, daß die Impulsantwort  $h(k)$  eines FIR-Filters die Folge der FIR-Filterkoeffizienten ist

$$h(k) = a_k \quad , \quad k = 0, \dots, N. \quad (19)$$

Die i.a. zeitlich unbegrenzte Impulsantwort des den Wunschfrequenzgang realisierenden idealen Systems ergibt sich durch inverse Fouriertransformation zu

$$h'(k) = f_a \int_{-0.5}^{0.5} H_w(F) e^{j2\pi k F} dF \quad , \quad H_w(F) = H'_w(2\pi F f_a) \quad , \quad F = \frac{f}{f_a}. \quad (20)$$

Für eines realisierbares System muß die Impulsantwort  $h(k)$  kausal ( $h(k) = 0$  für  $t < 0$ ) und endlich (FIR-Filter) sein. Dies wird durch Verschieben der idealen Impulsantwort um  $N/2$  und Nullsetzen für  $k < 0$  und  $k > N$  erreicht.

$$h(k) = \begin{cases} h'(k - N/2) & \text{für} \quad 0 \leq k \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (21)$$

$$= \begin{cases} f_a \int_{-0.5}^{0.5} H_w(F) e^{j2\pi(k - N/2)F} dF & \text{für} \quad 0 \leq k \leq N \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (22)$$

Damit steht bei gegebenen Wunschfrequenzgang eine approximative Berechnungsmöglichkeit der Impulsantwort zur Verfügung, die mit wachsendem  $N$  immer genauer wird.

Für in der Praxis häufig notwendige FIR-Filter mit *linearer Phase* gilt  $h(k) = h(N - k)$  (symmetrische Impulsantwort) oder  $h(k) = -h(N - k)$  (antisymmetrische Impulsantwort) [4]. Für  $h(k) = h(N - k)$  erfüllt der Wunschfrequenzgang

$$H_w(F) = H_w(-F) \quad (23)$$

und aufgrund der Reellwertigkeit des Systems muß der gewünschte Betragsverlauf  $A_w(F) = |H_w(F)|$  stets gerade sein und die Phase  $\phi(F) = \arg H_w(F)$  muß gleich Null sein. Dann vereinfacht sich (22) zu

$$h(k) = \begin{cases} 2f_a \int_0^{0.5} A_w(F) \cos(2\pi(k - N/2)F) dF & \text{für} \quad 0 \leq k \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (24)$$

Beispiel: Gesucht ist ein Tiefpaß mit der Grenzfrequenz  $F_g = f_g/f_a$  und linearer Phase.

Damit lautet der Betragsverlauf des Wunschfrequenzgangs  $A_w(F)$

$$A_w(F) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -F_g \leq F \leq F_g \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (25)$$

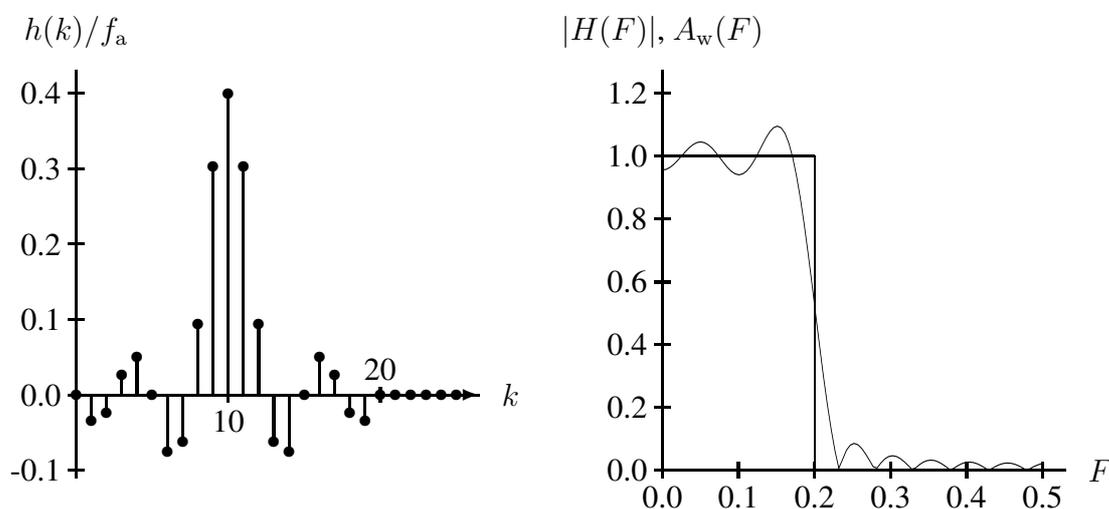
Einsetzen von  $A_w(F)$  in (24) liefert

$$h(k) = 2f_a \int_0^{F_g} \cos(2\pi(k - N/2)F) dF, \quad 0 \leq k \leq N \quad (26)$$

$$= 2f_a \frac{\sin(2\pi(k - N/2)F_g)}{2\pi(k - N/2)}, \quad 0 \leq k \leq N \quad (27)$$

$$= 2f_a F_g \text{sinc}(2\pi(k - N/2)F_g), \quad 0 \leq k \leq N. \quad (28)$$

Bild 12 zeigt die Impulsantwort und den Betrag der ÜTF  $H(F) = \mathcal{F}\{h(k)\}$  eines FIR-Tiefpasses nach (28) mit  $F_g = 0.2$  und  $N = 20$ . Es ist deutlich zu erkennen, daß durch die endliche Filterordnung lediglich eine Approximation und keine exakte Realisierung des gewünschten Betragsverlaufs  $A_w(F)$  möglich ist.



**Bild 12:** Impulsantwort  $h(k)$ , Wunschfrequenzgang  $A_w(F)$  und Betrag der ÜTF  $|H(F)|$  des FIR-Tiefpasses mit  $F_g = 0.2$  und  $N = 20$

Der Vorgang des Ausblendens des Intervalls  $0 \leq k \leq N$  aus der idealen Impulsantwort  $h'(k)$  wird auch als *Fensterung* bezeichnet (daher der Name des Entwurfverfahrens). Die Fensterung kann auch als Multiplikation der verschobenen Impulsantwort  $h'(k - N/2)$  mit einer Fensterfunktion  $w(k)$  aufgefaßt werden

$$h(k) = w(k)h'(k - N/2). \quad (29)$$

In der bisherigen Darstellung ist  $w(k)$  ein sog. *Rechteck-Fenster* mit  $w(k) = 1$  für  $0 \leq k \leq N$  und Null sonst. Durch die Bewertung mit anderen Fenstern (Hanning-Fenster, Hamming-Fenster, Blackman-Fenster, ... [8]) werden die Koeffizienten zum Rand des Fensters sanft reduziert. Dadurch wird die Welligkeit geringer und die Sperrdämpfung wird auf Kosten eines breiteren Übergangs an Unstetigkeitsstellen des Wunschfrequenzganges erhöht.

### 2.7.2 Berechnung der Koeffizienten eines IIR-Filters

Bei der Berechnung der Koeffizienten für IIR-Filter ist die Ordnung und die Charakteristik des Filters (Bessel, Butterworth, usw. [8]) vorzugeben. Die betreffenden Koeffizienten des analogen Filters können z.B. aus einer Tabelle (z.B. [13]) zu entnehmen. Auf diese Vorgehensweise soll im Rahmen dieses Versuches nicht weiter eingegangen werden.

Alternativ lassen sich mit Hilfe der bilinearen Transformation aus einer vorgegebenen analogen ÜTF die Systemfunktion des zugehörigen zeitdiskreten Filters und damit auch die Koeffizienten  $b_i$  und  $a_i$  bestimmen (siehe Vorbereitungsaufgaben).

## 3 Versuchsaufbau

Dieser Praktikumsversuch baut auf Versuch 2 (Signalparameter in Zeit- und Frequenzbereich) auf. Die dort erzeugten Signale sollen hier mit Hilfe von digitalen Filtern bearbeitet werden. Nach der digitalen Filterung führt die Soundkarte gemäß Bild 1 eine D/A-Wandlung und eine Tiefpass-Filterung durch. Das nun analoge Signal kann über die Stereo-Lautsprecher des PCs ausgegeben werden.

Zum Design des digitalen Filters wird unter Matlab ein Zusatzmodul „Digital Filter“ zur Verfügung gestellt. Es lässt sich direkt oder über das Modul „RecordSignal“ aufrufen. Nachdem das Eingangssignal gewählt wurde, werden die Filterparameter eingestellt. Das Design erfolgt entweder über die Angabe der Pol- und Nullstellen oder die Filterkoeffizienten. Die Impulsantwort  $h(k)$  sowie die Übertragungsfunktion  $H(\Omega)$  des zugehörigen zeitdiskreten Systems lassen sich darstellen. Nach Definition des Filters wird die Filteroperation durchgeführt.

Über die Funktion „Play“ kann der Vergleich zwischen Eingangs- und Ausgangssignal gezogen werden.

## 4 Vorbereitungsaufgaben

4.1 Betrachtet werde das System nach Bild 1 mit  $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $f_0 = 9\text{kHz}$ ,  $T_a = 100\mu\text{s}$  und  $g(k) = s(k)$ .

Bestimmen Sie das Ausgangssignal  $g(t)$ .

Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Spektrum des abgetasteten Signals  $s_a(t)$ .

4.2 Zeigen Sie anhand von  $H_Z(z)$ , daß ein FIR-Filter immer stabil ist.

4.3 Zeigen Sie, daß die Übertragungsfunktion  $H_Z(z)$  eines *rein rekursiven* IIR-Filters (d.h.  $a_n = 0$ ,  $\forall n = 1(1)N$ ) eine  $M$ -fache Nullstelle im Nullpunkt der  $z$ -Ebene besitzt.

4.4 Bestimmen Sie die Koeffizienten eines FIR-Tiefpasses mit der Grenzfrequenz  $F_g = 0.2$  und der Ordnung  $N=4$  nach Gleichung (28).

4.5 Entwerfen Sie einen IIR-Tiefpaß 1. Ordnung mit der Grenzfrequenz  $F_g = 0.2$  mit Hilfe der bilinearen Transformation

$$z = \frac{2}{T_a} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}.$$

.1 Bestimmen Sie Systemfunktion  $H_L(p)$  des analogen Systems.

.2 Bestimmen Sie Systemfunktion  $H_Z(z)$  des zeitdiskreten Systems.

.3 Skizzieren Sie die Struktur des digitalen Filters und geben Sie die Filterkoeffizienten  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$  und  $b_1$  an.

.4 Zeichnen Sie das dazugehörige Pol-Nullstellen-Diagramm.

.5 Skizzieren Sie den Betrag der Übertragungsfunktion  $H_{\text{TP,BL}}(e^{j\omega T})$ . (Hinweis: Um aus einem Pol- und Nullstellendiagramm (PND) den Betrag der ÜTF qualitativ zu skizzieren, wird über das PND in Gedanken ein *Gummituch* gelegt. Im Falle einer Nullstelle (NS) wird das Gummituch mit einer Heftzwecke fixiert und im Falle einer Polstelle (PS) wird das Gummituch durch eine senkrecht zum PND heraustretende Stricknadel gespannt. Nach wiederholter Durchführung dieser Methodik für jede NS und PS entsteht ein dreidimensionales Gebirge. Der qualitative Betragsverlauf der ÜTF ergibt sich dann durch das Profil des Gebirges entlang des Einheitskreises.

4.6 Gegeben sind die folgenden Filterkoeffizienten eines IIR-Filters 3. Ordnung nach Tabelle 1.

Die Aufgaben 4.6.1 bis 4.6.3 sind jeweils für Fall a) und für Fall b) zu lösen.

.1 Geben Sie die Übertragungsfunktionen  $H_Z(z)$  der Digitalfilter an.

	Fall a)	Fall b)
$a_0$	1.000	1.000
$b_1$	0.000	0.250
$b_2$	-0.500	-0.750
$b_3$	0.500	0.625

**Tabelle 1:** Filterkoeffizienten des IIR-Filters 3. Ordnung.

.2 Skizzieren Sie die Pol-Nullstellen-Diagramme von  $H_Z(z)$ .

Hinweis: In beiden Fällen liegt ein Pol von  $H_Z(z)$  bei  $z = 0.5 + j0.5$ .

.3 Sind die Filter stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

## 5 Versuchsdurchführung

1. Nehmen Sie mit Hilfe des Programms „RecordSignal“ ein Sprachsignal auf und starten Sie das Modul „DigitalFilter“.
2. Stellen Sie die vorgefertigten Filtertypen (Tiefpass, Hochpass, Bandpass) ein. Analysieren Sie die Impulsantworten, Übertragungsfunktionen, Pol-Nullstellendiagramme sowie den Betrag der Systemfunktion  $H_z(z)$ .
3. Filtern Sie das Eingangssignal mit den Filtertypen und vergleichen Sie das Eingangssignal mit dem Ausgangssignal.
4. Stellen Sie nun die in den Vorbereitungsaufgaben berechneten Filter
  - FIR-Filter 4. Ordnung aus 4.4
  - IIR-Filter 1. Ordnung aus 4.5 und
  - zwei IIR-Filter 3. Ordnung aus 4.6

über die manuelle Eingabe der Filterkoeffizienten ein. Untersuchen Sie die Eigenschaften der Filter, und vergleichen Sie die Eingangs- und Ausgangssignale. Welche Beobachtungen machen Sie? Überprüfen Sie auch die Richtigkeit Ihrer Ergebnisse aus den Vorbereitungsaufgaben.

5. Führen Sie die gleichen Schritte mit anderen Eingangssignalen (z.B. Sinus, Dreieck, Rechteck, Sweep, Musik) durch.

## Literatur

- [1] AZIZI, S. A., *Entwurf und Realisierung digitaler Filter*, R. Oldenbourg Verlag GmbH, München 1983
- [2] CZYLWIK, A., Vorlesung *Nachrichtentechnische Systeme 1*, Universität Duisburg-Essen
- [3] HAMMING, R. W., *Digitale Filter*, VCH Verlag, Weinheim, 1987
- [4] JOHNSON, J. R., *Digitale Signalverarbeitung*, Carl Hanser Verlag, Prentice Hall Inc., London, 1991
- [5] KUNT, M., *Digital Signal Processing*, Artech House, 1986
- [6] LAWS, P., Vorlesung *Ausgewählte Kapitel der Netzwerkanalyse und -synthese (Digitale Netzwerke)*, Universität Duisburg-Essen.
- [7] LUCK, H., Vorlesung *Theoretische Grundlagen der Nachrichtentechnik*, Universität Duisburg-Essen.
- [8] OPPENHEIM, A. V., und R. W. SCHAFER, *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*, R. Oldenbourg Verlag GmbH, München 1992
- [9] RABINER, L. R., und B. GOLD, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1975
- [10] SCHÜSSLER, H. W., *Netzwerke, Signale und Systeme, Band 1 Systemtheorie linearer elektrischer Netzwerke*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1981
- [11] SCHÜSSLER, H. W., *Netzwerke, Signale und Systeme, Band 2 Theorie kontinuierlicher und diskreter Signale und Systeme*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1984
- [12] SCHÜSSLER, H. W., *Digitale Signalverarbeitung, Band 1 Analyse diskreter Signale und Systeme*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1988
- [13] TIETZE, U. und CH. SCHENK, *Halbleiterschaltungstechnik*, Springer Verlag, Berlin, 1985
- [14] WILLMS, I., Vorlesung *Grundgebiete der Informationstechnik*, Universität Duisburg-Essen.