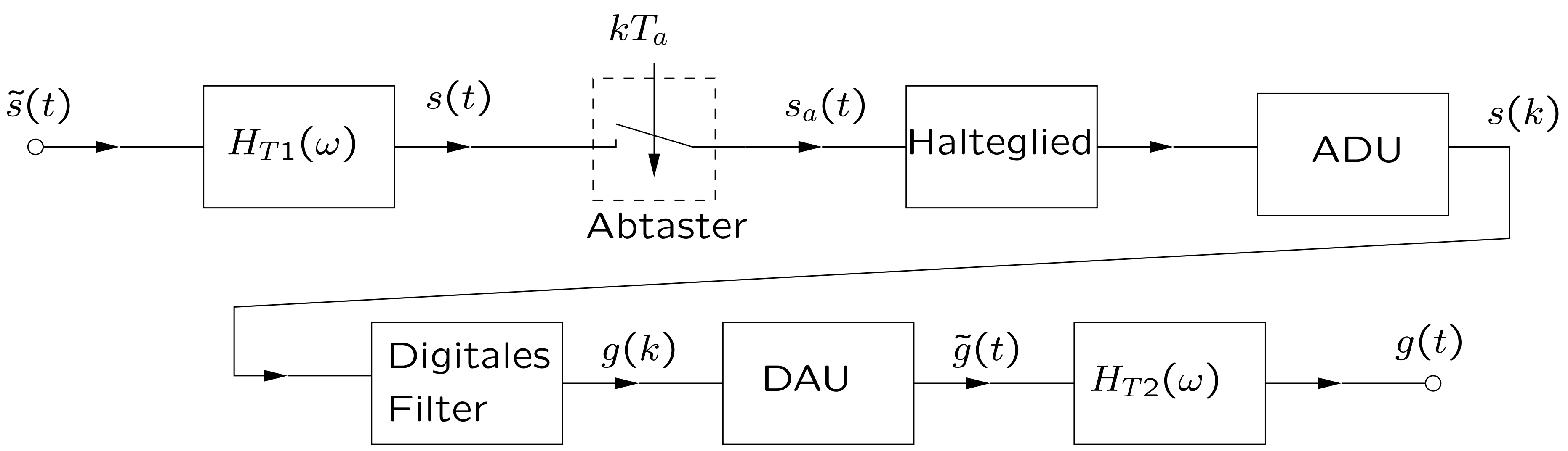
Seminar-Praktikum "Communications 1"

Seminarversuch 3:

"Digitale Filter"

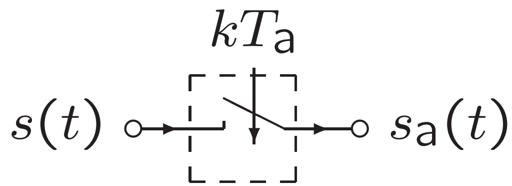
Stand: 30.10.2008

1. Der ideale Abtaster
2. Die $\mathcal{Z}$-Transformation zeitdiskreter Signale
3. Die Abbildung $z = \mathrm{e}^{pT_\mathrm{a}}$
4. Die bilineare Transformation
5. Das digitale Filter
6. Stabilität von Übertragungssystemen



$$H_{T1}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad h_{\text{Halte}}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_{T2}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

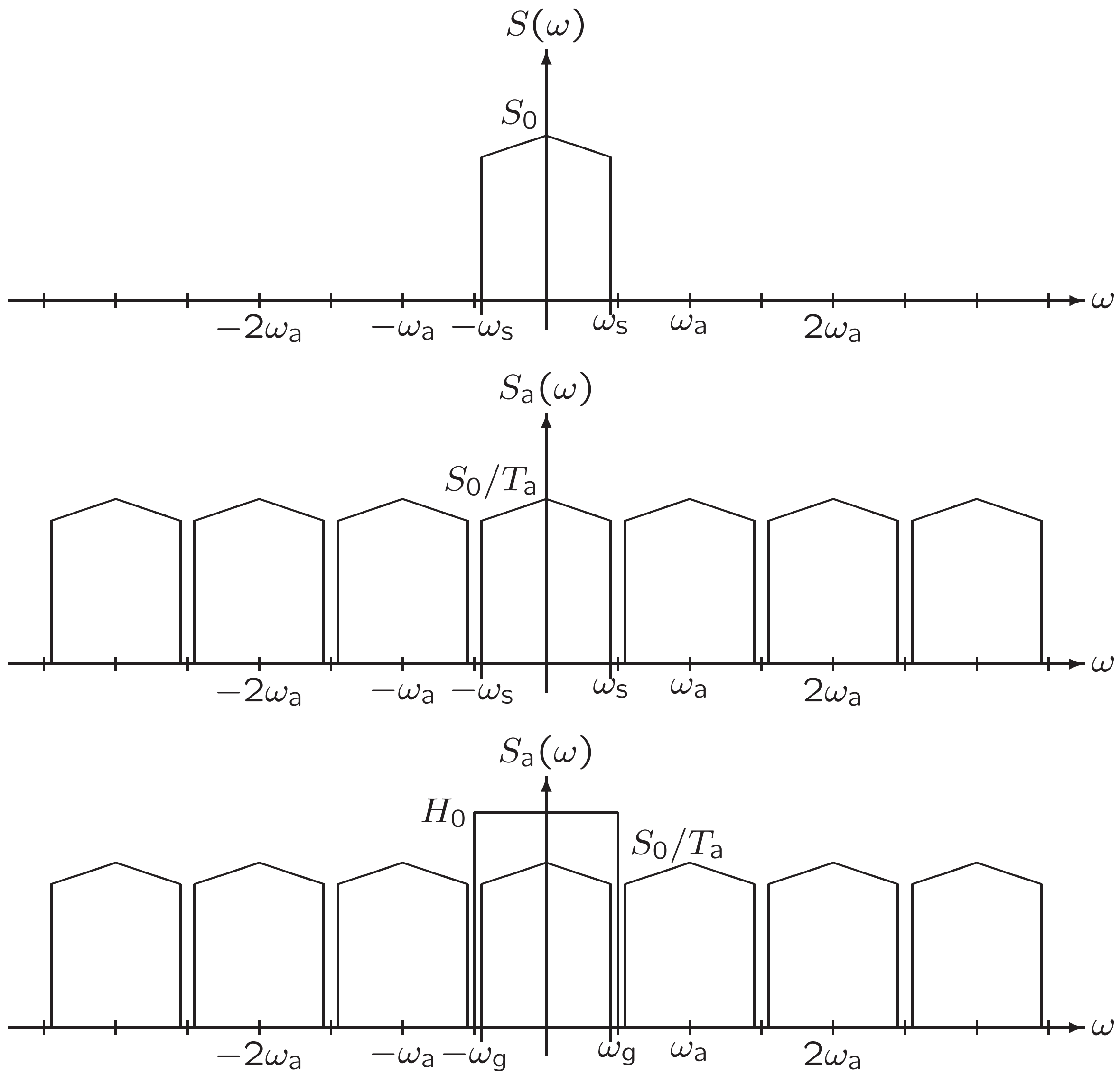


$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}, \omega_a \geq 2\omega_g$$

$$s_a(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - kT_a\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(kT_a\right) \delta\left(t - kT_a\right). \tag{1}$$

$$S_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} S(\omega) * \frac{2\pi}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_a}\right) \tag{2}$$

$$S_a(\omega) = \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - k\omega_a\right). \tag{3}$$



Rückgewinnung des Spektrums $S(\omega)$

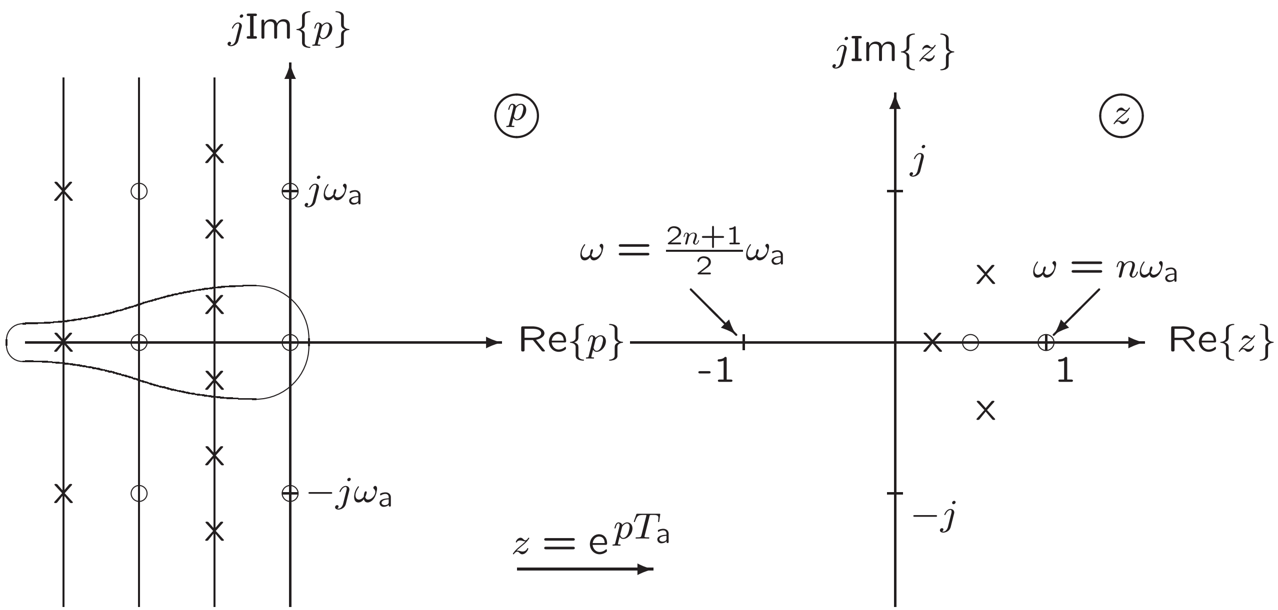
Die Anwendung der Laplace-Transformation auf das abgetastete Signal $s_a(t)$ ergibt

$$S_{\mathrm{a,L}}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} s\left(kT_{\mathrm{a}}\right) \mathrm{e}^{-pkT_{\mathrm{a}}}. \tag{4}$$

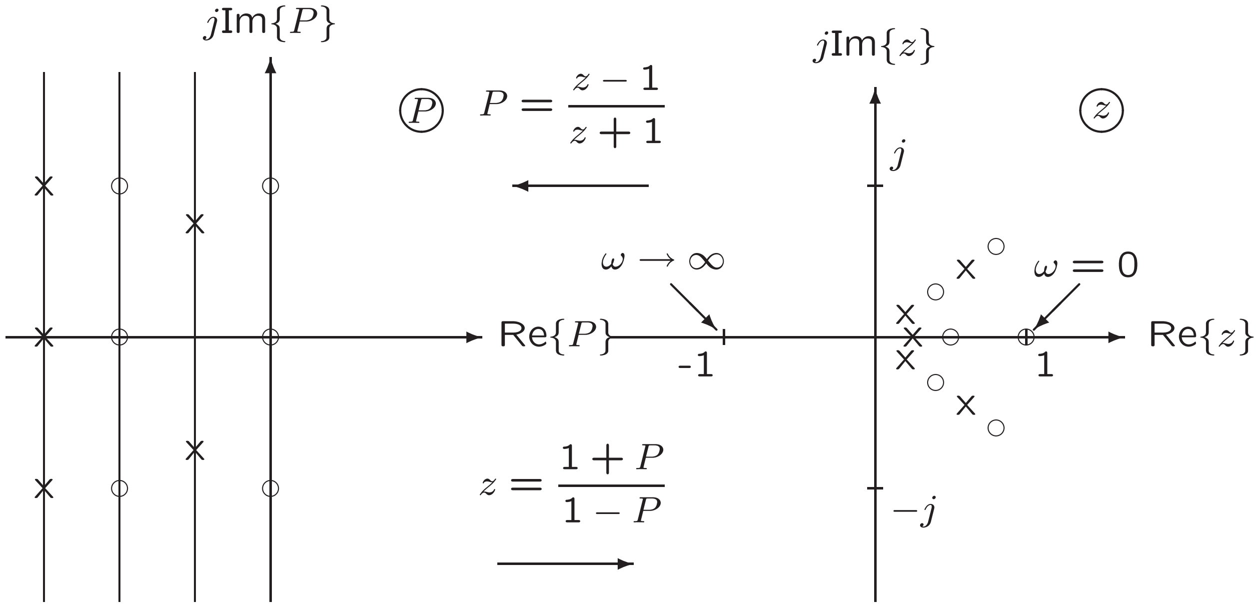
Mit der Kurzschreibweise $s(k)$ für $s\left(kT_{\mathrm{a}}\right)$ und der Abbildung $z = \mathrm{e}^{pT_{\mathrm{a}}}$ gilt

$$S_{\mathrm{Z}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k) z^{-k} \quad \text{mit} \quad S_{\mathrm{a,L}}(p) = S_{\mathrm{Z}}\left(z = \mathrm{e}^{pT_{\mathrm{a}}}\right). \tag{5}$$

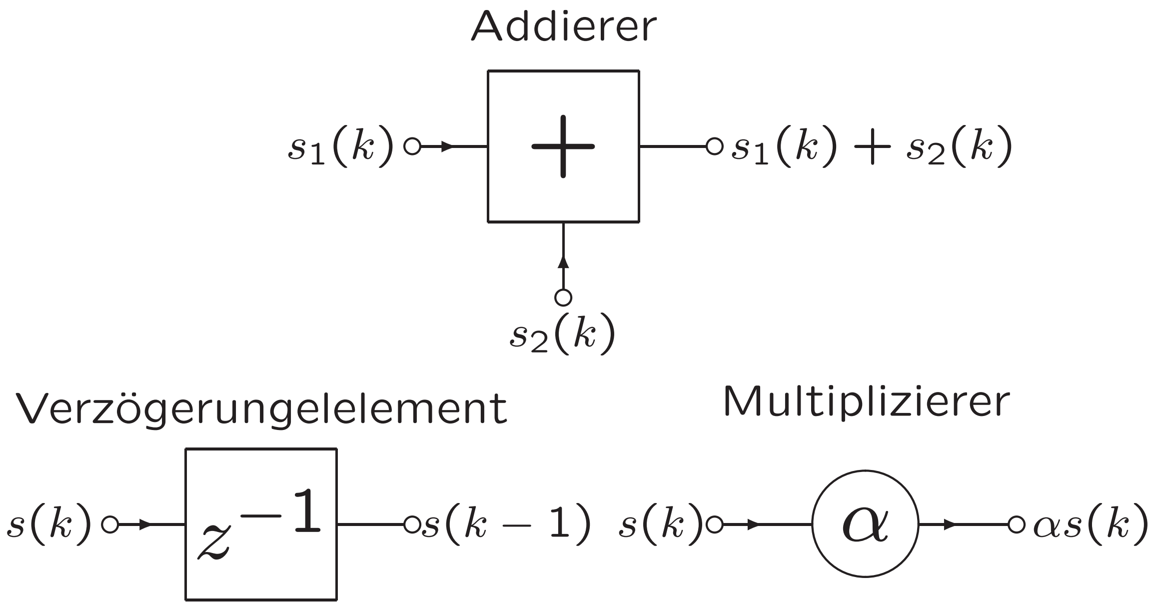
Durch die Abbildung $z = \mathrm{e}^{pT_\mathrm{a}} = \mathrm{e}^{\sigma T_\mathrm{a}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_\mathrm{a}}$, $p = \sigma + j\omega$, wird die imaginäre Achse ($\sigma = 0$) *auf* den Einheitskreis $z|_{\sigma=0} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_\mathrm{a}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}$ und die linke offene p-Halbebene ($\sigma < 0$) *auf das Innere* des Einheitskreises abgebildet.

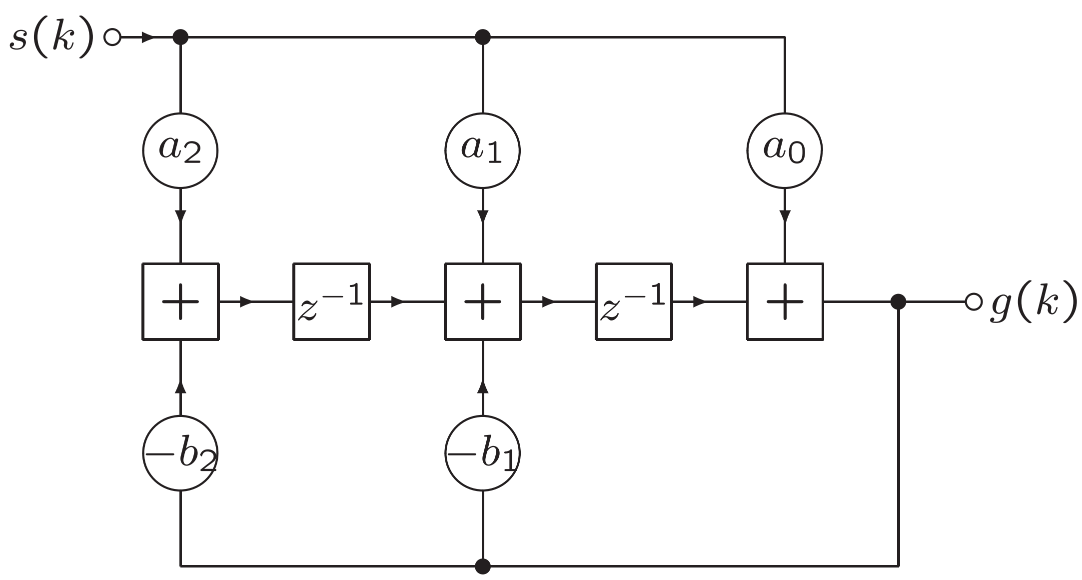


Diese Transformation bildet die linke, offene P-Halbebene auf das Innere des Einheitskreises in der z-Ebene und die $j\omega/\omega_g$-Achse der P-Ebene auf den Einheitskreis $z = e^{j\Omega}$ ab. Dabei wird $P = \pm\infty$ auf den Punkt $z = -1$, der Punkt $P = 0$ auf den Punkt $z = +1$ abgebildet.



Ein digitales Filter ist aus drei Grundelementen aufgebaut:





$$g(k) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot s(k-n) - \sum_{m=1}^{M} b_m \cdot g(k-m) \quad , \qquad N, M \in N_0 \tag{6}$$

$$H_{\mathrm{Z}}(z) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{N} a_n \cdot z^{-n}}{\sum\limits_{m=0}^{M} b_m \cdot z^{-m}}, \quad b_0 = 1. \tag{7}$$

Hinreichend und notwendig für die Stabilität eines kausalen, zeitdiskreten Systems ist, daß alle Polstellen $z_{\infty,\nu}$ der ÜTF $H_{\mathrm{Z}}(z)$ innerhalb des Einheitskreises in der z-Ebene liegen

$$|z_{\infty,\nu}| < 1 \quad \forall \nu.$$