

Grundlagen der Elektrotechnik

3

Prof. Dr.-Ing. Ingolf Willms

und

Prof. Dr.-Ing. Adalbert Beyer

und basierend auf dem Script von

Prof. Dr.-Ing. Ingo Wolff



Grundlagen der Elektrotechnik 3

Inhalt

- 1 Einleitung
- 2 Grundlagen der Signaltheorie determinierter Signale
- 3 Schaltvorgänge
- 4 Ortskurven
- 5 Netzwerksätze
- 6 Fernleitungen



Literatur

- Literatur zur Vorlesung:

R. Paul Elektrotechnik 2, Grundlagenbuch Netzwerke
Springer-Verlag, Heidelberg 1994

I. Wolff Grundlagen der Elektrotechnik Band 2
Verlag Dr. Wolff, Aachen 2005

- Weiterführende Literatur :

W. Ameling Grundlagen der Elektrotechnik II

G. Bosse Grundlagen der Elektrotechnik IV
B.I. Wissenschaftsverlag Mannheim, Wien Zürich 1996

R. Unbehauen Grundlagen der Elektrotechnik I
Springer-Verlag, Heidelberg 1994

Prof. Dr.-Ing. I. Willms

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Grundlagen der Elektrotechnik 3

Fachgebiet
Nachrichtentechnische Systeme

S. 3



1 Einleitung

- GET3 enthält überwiegend theoretische Grundlagen zu informationstechnischen Fragestellungen
- Informationstechnik: Entstanden aus Informatik (I-Verarbeitungstechnik) und Nachrichtentechnik (I-Übermittlungstechnik)
- IT: Effiziente Datenverarbeitung, Speicherung und Transport
- IT beinhaltet 4 Gruppen:
 - Grundlagen und Technologien (G1)
 - Strukturen, Verfahren, Programme (G2)
 - Geräte, Einrichtungen, Anlagen (G3)
 - Anwendungen (G4)



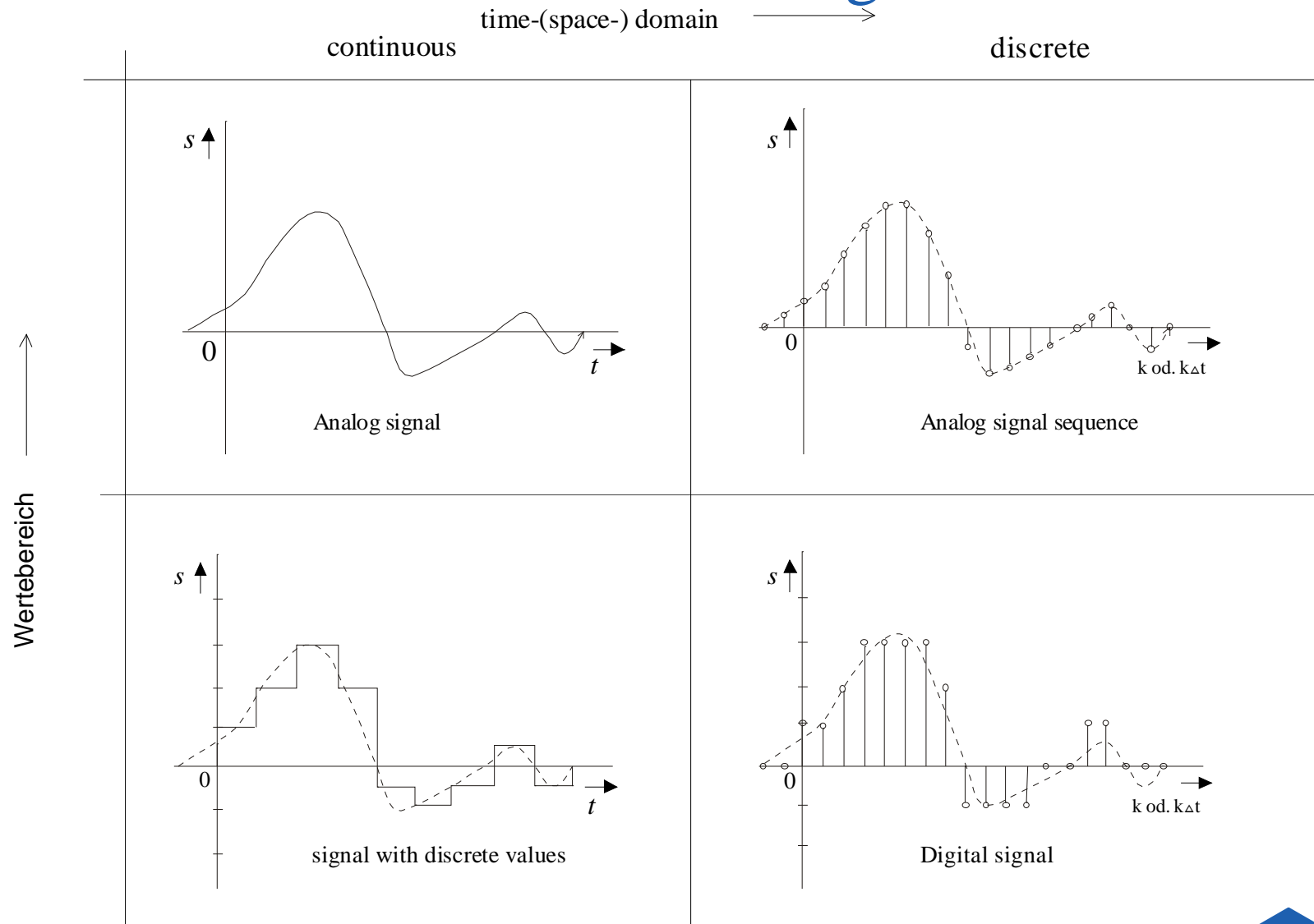
2 Grundlagen der Signaltheorie determinierter Signale

Kapitelübersicht

- 2.1 Vorbemerkungen
 - Signalklassen
- 2.2 Beschreibung nichtsinusförmiger, periodischer Zeitvorgänge
 - Approximation von Funktionen mit Fourier-Reihe
 - Anwendungen auf Netzwerke
- 2.3 Beschreibung aperiodischer Zeitvorgänge
 - Das Fourier-Integral in verschiedenen Formen
 - Beispiele dazu
 - Eigenschaften der Fourier-Transformation



2.1 Vorbemerkungen



2.1.1 Das Exponentialsignal

$$s(t) = e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

Für Spannungen gilt:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \underline{u} \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad \text{where} \quad \underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}$$

Für ansteigende/abfallende Signale gilt:

$$e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} = e^{pt}$$



2.1.2 Die Dirac Funktion

Definition:

$$\Phi(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) \cdot \Phi(t) dt$$

Eigenschaften:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t)$$

Für $a = -1$ gilt: $\delta(-t) = \delta(t)$

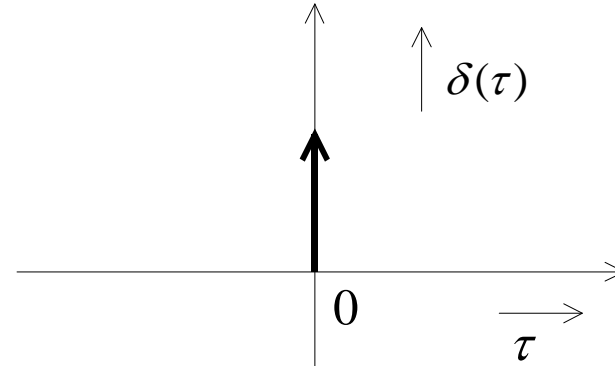
$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t) \cdot s(\tau) d\tau \quad \text{Folgt aus der Definitionsgleichung.}$$



2.1.2 Die Dirac Funktion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = s(0) = 1 \quad \text{mit} \quad \delta(\tau) \equiv 0 \quad \text{für} \quad \tau \neq 0$$

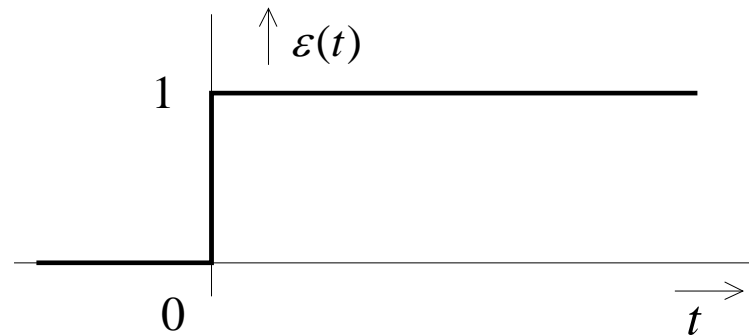
$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



2.1.3 Die Sprungfunktion

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$



2.1.4 Periodische Signale

Allgemeine Formel:

$$s(t) = s(t + nT) \quad \text{where } n = -\infty, \dots, -1, +1, \dots, +\infty$$

Beispiele:

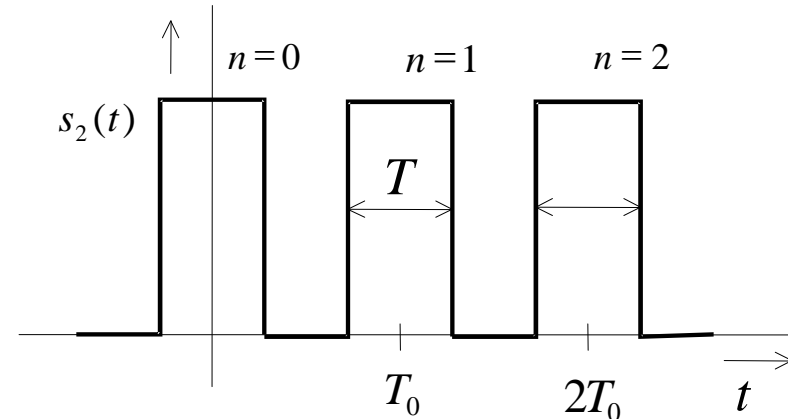
$$s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_1(t - nT_0)$$

$$s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n s_1(t - nT_0)$$



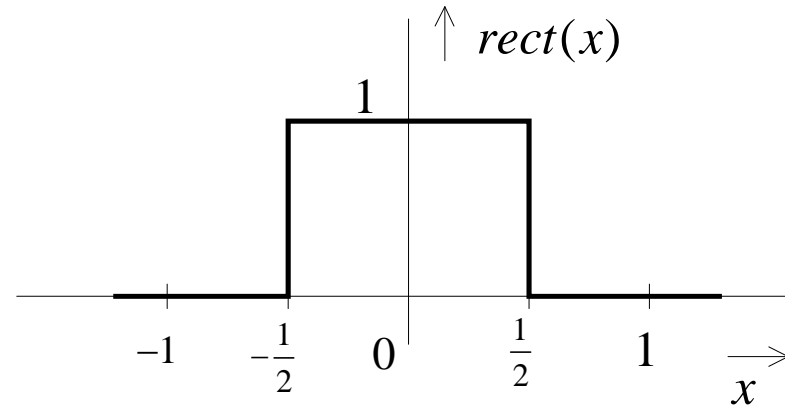
2.1.4 Periodische Signale

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\ \Rightarrow s_2(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-nT_0}{T}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T} - n\frac{T_0}{T}\right) \end{aligned}$$



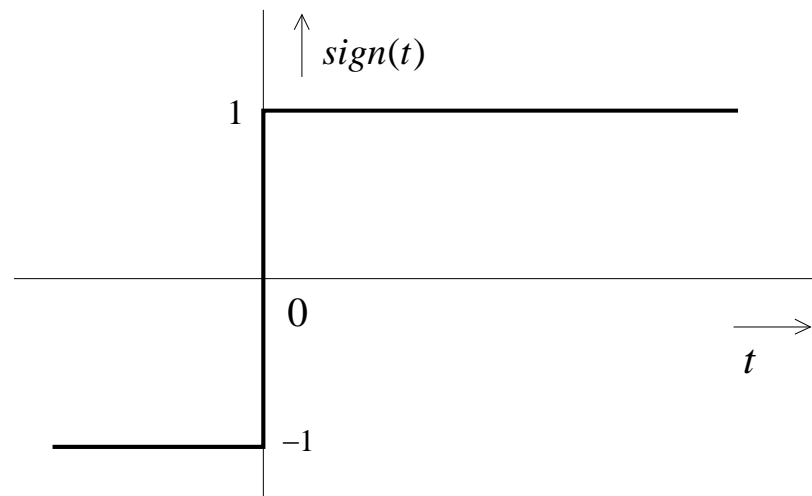
2.1.5 Impulsartige Signale

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{for } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



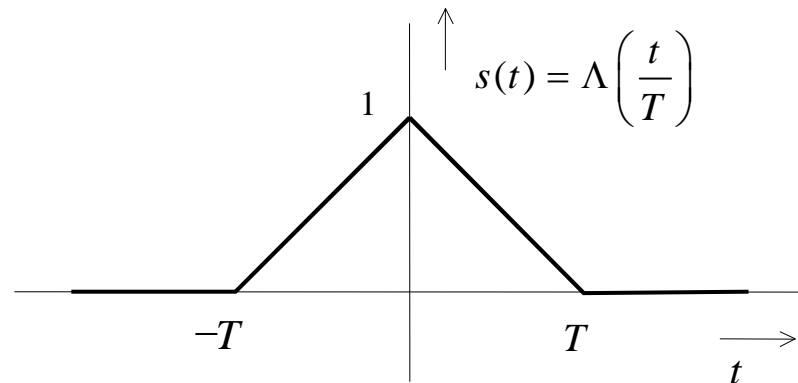
2.1.5 Impulsartige Signale

$$s(t) = \text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t = 0 \\ -1 & \text{for } t < 0 \end{cases}$$



2.1.5 Impulsartige Signale

$$s(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t}{T}\right| & \text{für } |t| \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



2.1.6 Anpassung von Zeit- und Frequenz Functionen

Fall1: Kompression & Dehnung

$$s_2(t) = a \cdot s_1\left(\frac{t}{b}\right)$$

Beispiel:

$$s_2(t) = u_0 \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

Fall 2: Verschiebung

$$s_2(t) = s_1(t - T_v)$$



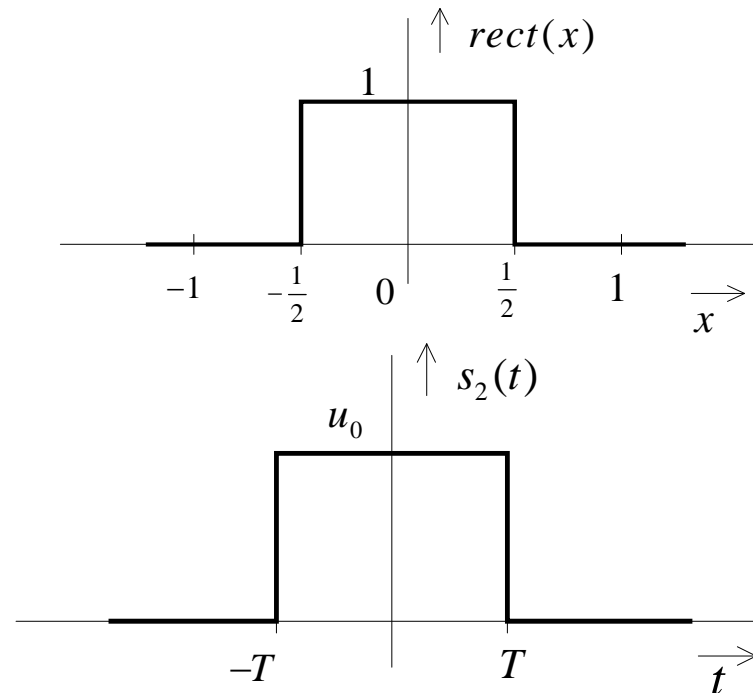
2.1.6 Anpassung von Zeit- und Frequenz Funktionen

Beispiel:

$$s_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$s_2(t) = u_0 \cdot s_1\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= u_0 \cdot \text{rect}\left(\frac{t/2}{T}\right)$$



2.1.6 Anpassung von Zeit- und Frequenz Functionen

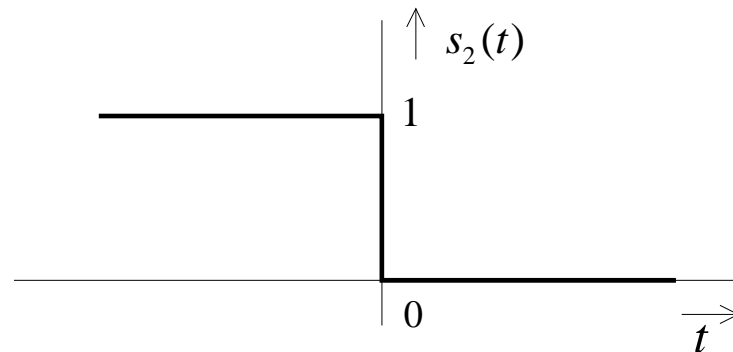
Fall 3: Spiegelung ($b = -1$)

$$s_2(t) = s_1(-t)$$

Beispiel:

$$s_1(t) = \varepsilon(t)$$

$$\begin{aligned} s_2(t) &= s_1(-t) \\ &= \varepsilon(-t) \end{aligned}$$

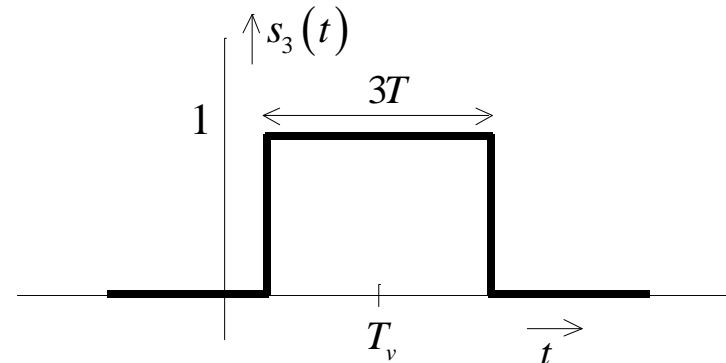


2.1.6 Anpassung von Zeit- und Frequenz Funktionen

Dehnung & Verschiebung:

$$s_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad s_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{3T}\right)$$

$$s_3(t) = s_2(t - T_v) = \text{rect}\left(\frac{t - T_v}{3T}\right)$$



Verschiebung & Dehnung:

$$s_2(t) = s_1(t - T_v)$$

$$s_3(t) = as_2\left(\frac{t}{b}\right) \quad \text{Ersetzung von } t \text{ mit } \frac{t}{b} \text{ in } s_1(t)$$

$$= as_1\left(\frac{t}{b} - T_v\right)$$

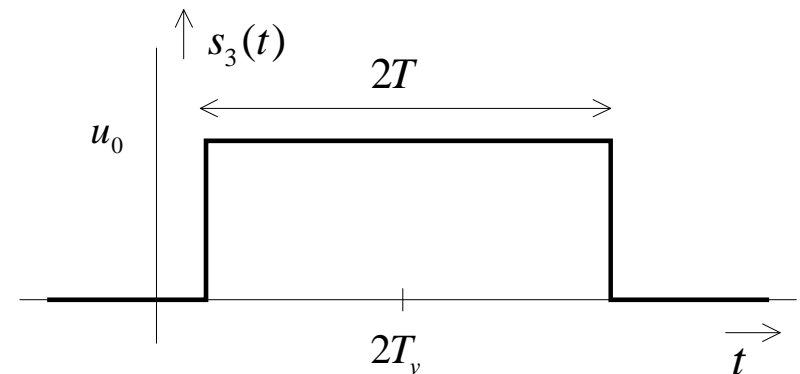
2.1.6 Anpassung von Zeit- und Frequenz Functionen

Beispiel:

$$s_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right); \quad a = u_0; \quad b = 2$$

$$s_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T_v}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{T_v}{T}\right)$$

$$s_3(t) = \text{arect}\left(\frac{t}{bT} - \frac{T_v}{T}\right) = u_0 \text{rect}\left(\frac{t}{2T} - \frac{T_v}{T}\right)$$



2.1.6 Anpassung von Zeit- und Frequenz Functionen

Spiegelung & Verschiebung:

$$s_2(t) = s_1(-t)$$

$$s_3(t) = s_2(t - T_v) = s_1(-(t - T_v)) = s_1(T_v - t)$$

Neue Abfolge: Verschiebung & Spiegelung:

$$s_4(t) = s_1(t - T_v)$$

$$s_5(t) = s_4(-t) = s_1(-t - T_v) \neq s_3(t)$$



2.1.6 Anpassung von Zeit- und Frequenz Funktionen

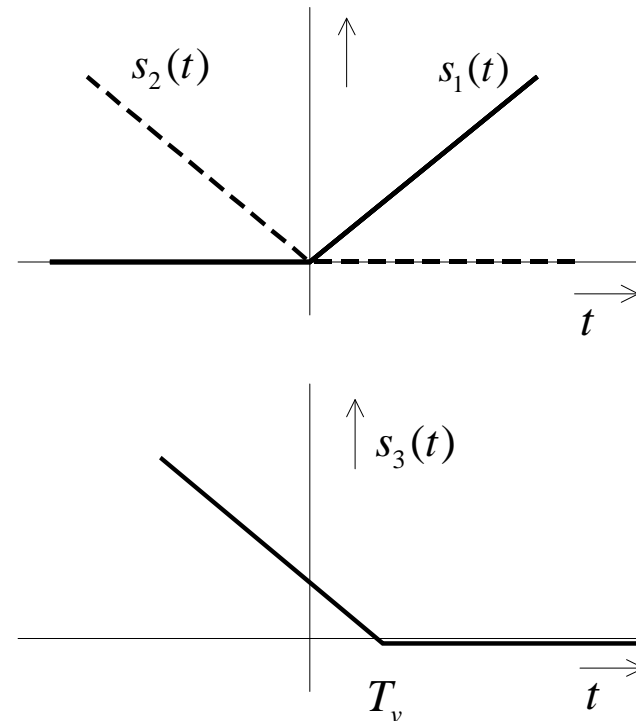
Beispiel mit der Rampenfunktion $r(t)$:

$$r\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{t}{T} \cdot \varepsilon(t)$$

$$s_1(t) = r\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$s_2(t) = s_1(-t) = r\left(\frac{-t}{T}\right)$$

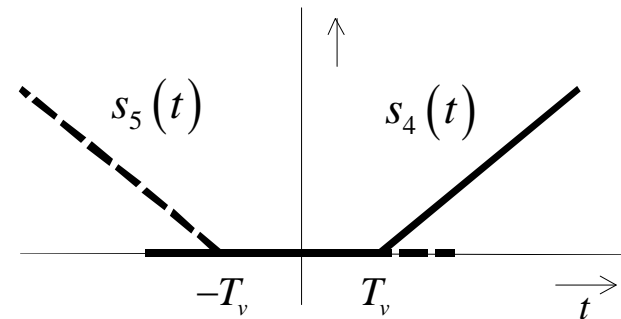
$$s_3(t) = s_2(t - T_v) = r\left(\frac{T_v - t}{T}\right)$$



2.1.6 Anpassung von Zeit- und Frequenz Functionen

$$s_4(t) = s_1(t - T_v) = r\left(\frac{t - T_v}{T}\right)$$

$$s_5(t) = s_4(-t) = r\left(\frac{-t - T_v}{T}\right)$$



Es gibt 4 Fälle: $\pm t \pm T_v$

2.1.6 Anpassung von Zeit- und Frequenz Funktionen

Alle o.a. Methoden können auch auf
Frequenzfunktionen angewendet werden:

$$f_1(x) = f_2(y) \quad \text{mit} \quad y = f_3(x)$$
$$\Rightarrow f_1(x) = f_2(f_3(x))$$

Beispiel:

$$f_1(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_1}\right)$$



2.2 Beschreibung nichtsinusförmiger, periodischer Zeitvorgänge

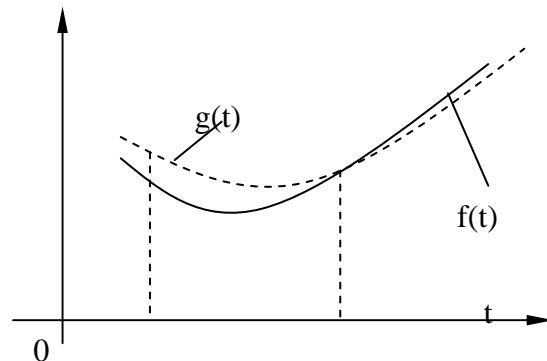
2.2.1 Approximation von Funktionen

- Motivation: Kennfunktionen, Extraktion von Kenndaten
Datenkompression

- Ansatz: Gegeben sei $f(t)$

Gesucht ist $g(t)$, die $f(t)$ im Intervall approximiert mit

$$g(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(t) \text{ bei Vorgabe der } g_i(t)$$



2.2.1 Approximation von Funktionen

- Anforderung: Möglichst kleiner Fehler der Approximation

- Definition Fehlerfunktion: $\Phi(t) = f(t) - g(t)$

- Mittlerer Fehler: $\Phi_{m|\min} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - g(t)] dt_{|\min}$

- Mittlerer absoluter Fehler : $\Phi_{ma|\min} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t) - g(t)| dt_{|\min}$

- Mittlerer Quadratischer Fehler : $\Phi_{mq|\min} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - g(t)]^2 dt_{|\min}$

- Vorteile/Nachteile der Fehlermaße

- Aufheben der Fehler möglich bei mittlerem Fehler
- Absol. Fehler ergibt Unstetigkeiten (beim part. Differenzieren)
- Quadr. Fehler ist häufigste Anwendung



2.2.1 Approximation von Funktionen

- Bestimmung der Koeffizienten α_v
- Hieraus folgen die unten angegebenen Schritte:

$$\frac{\partial \phi_{mq}}{\partial \alpha_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{j=1}^n \alpha_j g_j(t) \right]^2 dt \right] = 0$$

$$-\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} 2 \left[f(t) - \sum_{j=1}^n \alpha_j g_j(t) \right] g_i(t) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j g_j(t) \right] dt$$

Dies entspricht einem Gleichungssystem, das nach den Koeffizienten aufgelöst werden kann



2.2.1 Approximation von Funktionen

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_1(t)dt = \alpha_1 \int_{t_1}^{t_2} g_1^2(t)dt + \alpha_2 \int_{t_1}^{t_2} g_1(t)g_2(t)dt + \dots + \alpha_\nu \int_{t_1}^{t_2} g_1(t)g_\nu(t)dt + \dots + \alpha_n \int_{t_1}^{t_2} g_1(t)g_n(t)dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_2(t)dt = \alpha_1 \int_{t_1}^{t_2} g_1(t)g_2(t)dt + \alpha_2 \int_{t_1}^{t_2} g_2(t)g_2(t)dt + \dots + \alpha_\nu \int_{t_1}^{t_2} g_2(t)g_\nu(t)dt + \dots + \alpha_n \int_{t_1}^{t_2} g_2(t)g_n(t)dt$$

·
·
·

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_n(t)dt = \alpha_1 \int_{t_1}^{t_2} g_1(t)g_n(t)dt + \alpha_2 \int_{t_1}^{t_2} g_2(t)g_n(t)dt + \dots + \alpha_\nu \int_{t_1}^{t_2} g_\nu(t)g_n(t)dt + \dots + \alpha_n \int_{t_1}^{t_2} g_n(t)g_n(t)dt$$



2.2.2 Approximation mittels orthogonaler Funktionensysteme

- Definition orthogonaler Funktionen in Intervall (t_1, t_2) mittels reeller Funktionen $g(t)$. Diese Funktionen sollen stetig im Intervall sein.
- Dabei wird Dirac'sche Deltafunktion benutzt:
- Ansatz für die Approximation:
- Damit folgt für die Koeffizienten (infolge Wegfalls aller Integrale je Zeile bis auf zwei Integrale):

$$\int_{t_1}^{t_2} g_{\mu}(t) g_{\nu}(t) dt = \delta_{\mu\nu} \cdot h_{\mu}$$

und geeignetem h_{μ}

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{für } \mu = \nu \end{cases}$$

$$g(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(t)$$

$$\alpha_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt}$$



2.2.2 Approximation mittels orthogonaler Funktionensysteme

Man erhält orthonormale Funktionensysteme mittels der Festlegungen

$$G_1(t) = \frac{g_1(t)}{\sqrt{h_1}}, G_2(t) = \frac{g_2(t)}{\sqrt{h_2}}, \dots, G_\nu(t) = \frac{g_\nu(t)}{\sqrt{h_\nu}}, \dots, G_n(t) = \frac{g_n(t)}{\sqrt{h_n}}$$

Für diese gilt dann:

$$\int_{t_1}^{t_2} G_\mu(t) G_\nu(t) dt = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{für } \mu = \nu \end{cases}$$

Damit lässt sich eine Funktion $f(t)$ im Intervall mit Hilfe von geeigneten Koeffizienten in eine Reihe von orthonormalen Funktionen entwickeln. Das Ergebnis der Approximation ist dann eine Funktion $G(t)$.

Zusammenfassend gilt:

$$f(t) \cong G(t) = \sum_{i=1}^n A_i G_i(t)$$

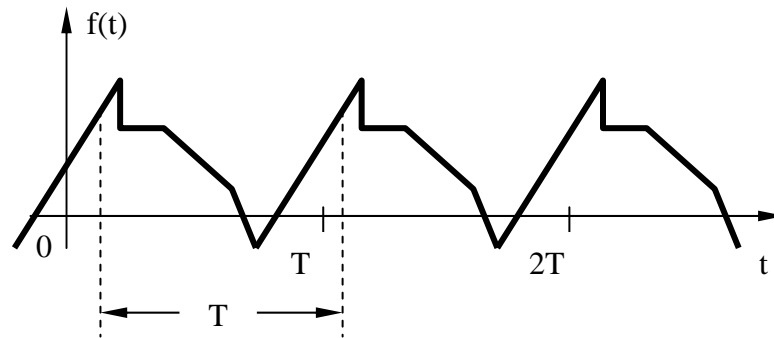
Die Koeffizienten A sind die sog. verallgemeinerten Fourierkoeffizienten:

$$A_i = \int_{t_1}^{t_2} f(t) G_i(t) dt$$



2.2.3 Approximation von periodischen, nicht-sinusförmigen Funktionen

Beispiel einer Funktion mit der Periodendauer T . Diese Funktion ist als nicht endende Wiederholung einer Periode interpretierbar.



Für eine periodische Funktion gilt: $f(t) = f(t \pm \nu T) \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$

Nach Fourier kann eine beliebige Funktion, die die Dirichlet'schen Bedingungen erfüllt, u.a. in der folgenden trigonometrischen Form dargestellt werden:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} [a_{\nu} \cos(\nu\omega t) + b_{\nu} \sin(\nu\omega t)]$$



2.2.2 Approximation von periodischen, nicht-sinusförmigen Funktionen (Fourier-Reihe)

- Dirichlet'sche Bedingungen (in der Praxis erfüllt)
 - Funktion $f(t)$ ist im Intervall entweder stetig oder hat endlich viele Unstetigkeitsstellen
 - Endliche Grenzwerte von $f(t)$ existieren, wenn t von rechts oder von links gegen die Unstetigkeitsstelle strebt
 - Das Intervall lässt sich derart in Teile zerlegen, so dass dort $f(t)$ monoton ist
- Satz von Dirichlet
 - Bei Erfüllung der Dirichlet'schen Bedingungen konvergiert die Fourierreihe im gesamten Intervall
 - Der Wert der Fourierreihe ist identisch mit Funktion $f(t)$ an stetigen Stellen
 - An Unstetigkeitsstellen ist der Wert gleich: $0.5[f(t+0) + f(t-0)]$
 - An Endpunkten des Intervalls ist der Wert gleich: $0.5[f(t_1+0) + f(t_2-0)]$



2.2.3 Fourier Reihe

Analogie zur Reihenentwicklung orthogonaler Funktionen

- Für die Reihenentwicklung gilt bei orthogonalen Funktionen
$$\int_{t_1}^{t_2} g_\mu(t) g_\nu(t) dt = \delta_{\mu\nu} \cdot h_\mu$$

$$g(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(t) \quad \text{mit} \quad \alpha_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt}$$

- Für die bei der Fourier-Reihe benutzten Funktionen läßt sich die Orthogonalität zeigen:
$$\int_{t_1=t_0}^{t_2=t_0+T} \sin(\mu\omega t) \sin(\nu\omega t) dt = \int_{t_1=t_0}^{t_2=t_0+T} \cos(\mu\omega t) \cos(\nu\omega t) dt = \frac{T}{2} \delta_{\mu\nu}$$

- Ansonsten gilt wie o.a. :
- Dadurch ist gesichert, dass Fourier-Reihe die bestmögliche Approximation im quadratischen Mittel ist (auch bei abgebrochener Reihe)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} [a_\nu \cos(\nu\omega t) + b_\nu \sin(\nu\omega t)]$$

Es sind 2 Koeffizientensätze nötig, damit gerade und ungerade Funktionsanteile dargestellt werden können.



2.2.3 Fourier Reihe

Damit gilt für die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten der trigonometrischen Form:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\int_{t_1=t_0}^{t_2=t_0+T} f(t) \cdot 1 dt}{\int_{t_1=t_0}^{t_2=t_0+T} 1^2 dt} = \frac{1}{T} \int_{t_1=t_0}^{t_2=t_0+T} f(t) dt$$

Dies ist der Gleichanteil (arithm. Mittelwert)

$$a_v = \frac{\int_{t_1=t_0}^{t_2=t_0+T} f(t) \cos(v\omega t) dt}{\int_{t_1=t_0}^{t_2=t_0+T} \cos^2(v\omega t) dt} = \frac{2}{T} \int_{t_1=t_0}^{t_2=t_0+T} f(t) \cos(v\omega t) dt$$

$$b_v = \frac{\int_{t_1=t_0}^{t_2=t_0+T} f(t) \sin(v\omega t) dt}{\int_{t_1=t_0}^{t_2=t_0+T} \sin^2(v\omega t) dt} = \frac{2}{T} \int_{t_1=t_0}^{t_2=t_0+T} f(t) \sin(v\omega t) dt$$



2.2.4 Die Polar-Form der Fourier Reihe (Fourier-Cosinus-Reihe)

- Mittels der Beziehung $A \cos(x) + B \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x - \arctan(B/A))$

lässt sich die trigon. Fourier-Reihe umschreiben von

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} [a_v \cos(v\omega t) + b_v \sin(v\omega t)] \text{ zu}$$

$$f(t) = d_0 + \sum_{v=1}^{\infty} d_v \cos(v\omega t + \psi_v) \text{ mit } d_0 = \frac{a_0}{2} \text{ und}$$

$$d_v = \sqrt{a_v^2 + b_v^2} ; \quad \psi_v = -\arctan\left(\frac{b_v}{a_v}\right) \quad (+/- \pi \text{ für negative } a_v)$$

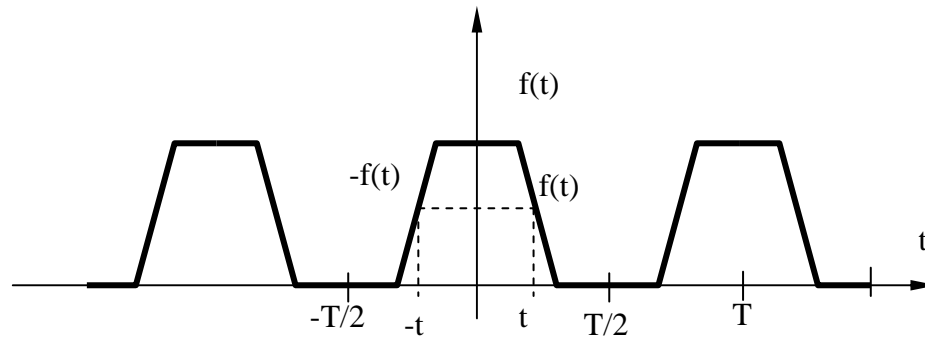
Darüber hinaus ist obige Formel auch in der Version der Fourier-Sinus-Reihe bekannt:

$$f(t) = e_0 + \sum_{v=1}^{\infty} e_v \sin(v\omega t + \varphi_v) \text{ mit } e_v = d_v \text{ sowie } \varphi_v = \pi/2 + \psi_v$$



2.2.5 Beispiele zur Berechnung der Fourier-Reihe mit symmetr. Funktionen

- B1: $f(t)$ ist eine gerade Funktion mit $f(-t) = f(t)$ und



$$a_v = \frac{2 \cdot 2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(v\omega t) dt$$

$$b_v = \frac{2}{T} \int_{t_0=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(v\omega t) dt = 0$$

Die Fourier-Reihe hat damit die Form:

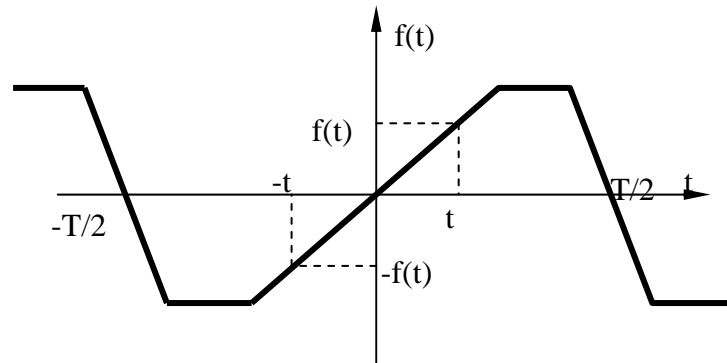
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} a_v \cos(v\omega t)$$

Grund:

Darstellbarkeit gerader Funktionen nur durch andere gerade Funktionen

2.2.5 Beispiele zur Berechnung der Fourier-Reihe mit symmetr. Funktionen

- B2: $f(t)$ ist eine ungerade Funktion mit $f(t) = -f(-t)$ und



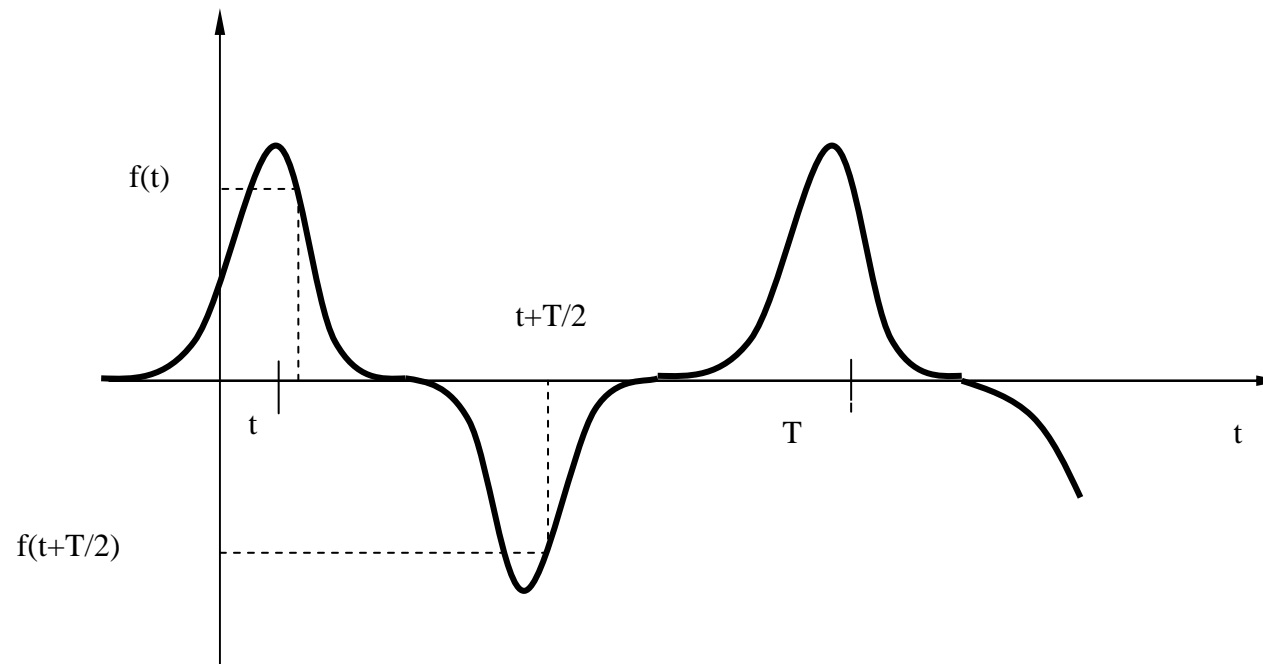
$$\frac{a_0}{2} = a_\nu = 0 \quad b_\nu = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(\nu\omega t) dt$$

Somit resultiert:

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin(\nu\omega t)$$

2.2.5 Beispiele zur Berechnung der Fourier-Reihe mit symmetr. Funktion

- B3: $f(t)$ ist vollsymmetrische Funktion mit $f(t) = -f(t + T/2)$



2.2.5 Beispiele zur Berechnung der Fourier-Reihe mit symmetr. Funktion

Es gilt dafür :

$$a_\nu = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\nu\omega t) dt$$

oder nach Aufteilung
des Intervalls:

$$a_\nu = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(\nu\omega t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) \cos(\nu\omega t) dt \right]$$

für $\nu = 2k$ gilt:

$$a_{2k} = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(2k\omega t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) \cos(2k\omega t) dt \right] = 0$$

sowie für $\nu = 2k + 1$:

$$a_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos[(2k+1)\omega t] dt$$

Grund: Geradzahlige k ergeben sich nach $T/2$ wiederholende cos-Funktionen.
Auslöschung der Terme wegen zu $T/2$ negativen und sich wiederholendem $f(t)$!



2.2.5 Beispiele zur Berechnung der Fourier-Reihe mit symmetr. Funktion

- Auf ähnlicher Weise läßt sich die Gültigkeit folgender Aussagen einsehen (auch sin-Funktion wiederholt sich für gerade k nach $T/2$):

$$b_{2k} = 0 \quad \text{und} \quad b_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin[(2k+1)\omega t] dt$$

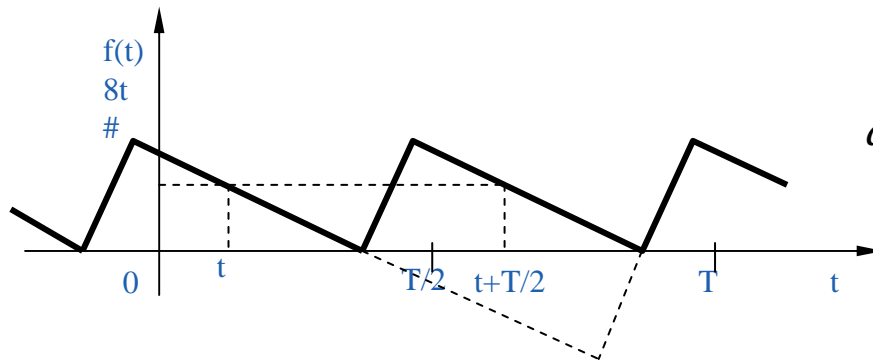
- Es kommen daher in dieser Fourier-Reihe nur ungeradzahlige Schwingungen vor, für die $\nu = 2k + 1$ gilt:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_{2k+1} \cos[(2k+1)\omega t] + b_{2k+1} \sin[(2k+1)\omega t] \right\}$$



2.2.5 Beispiele zur Berechnung der Fourier-Reihe mit symmetr. Funktion

- B4 : Funktion ist vollsymmetrisch mit $f(t) = f(t + T/2)$. Daraus folgt dann:



$$a_{2k} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(2k\omega t) dt \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = 0$$

$$b_{2k} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(2k\omega t) dt \quad \text{und} \quad b_{2k+1} = 0$$

Grund: Nach $T/2$ erfolgt Wiederholung der cos/sin-Funktionen mit den Indizes $2k$.

Cos/sin-Funktionen mit Indizes $2k+1$ haben bei $T/2$ Abstand jeweils andere Halbwelle!

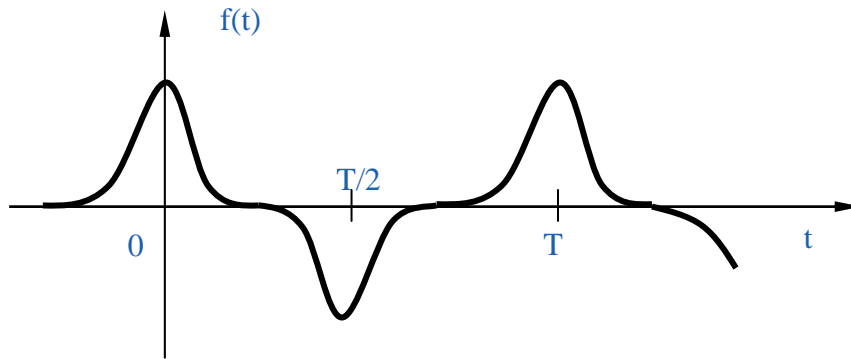
Die Fourier-Reihe von $f(t)$ hat dann eine Form mit allein geradzahigen Koeffizienten:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_{2k} \cos[(2k)\omega t] + b_{2k} \sin[(2k)\omega t] \}$$

2.2.5 Beispiele zur Berechnung der Fourier-Reihe mit symmetr. Funktion

- B5 : $f(t)$ ist gerade und vollsymmetrisch [$f(t) = -f(t + T/2)$] :

Resultat: Nur ungeradzahlige Kosinusschwingungen kommen vor



$$\frac{a_0}{2} = a_{2k} = 0 \quad \text{und} \quad b_v = 0$$

$$a_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cos[(2k+1)\omega t] dt$$

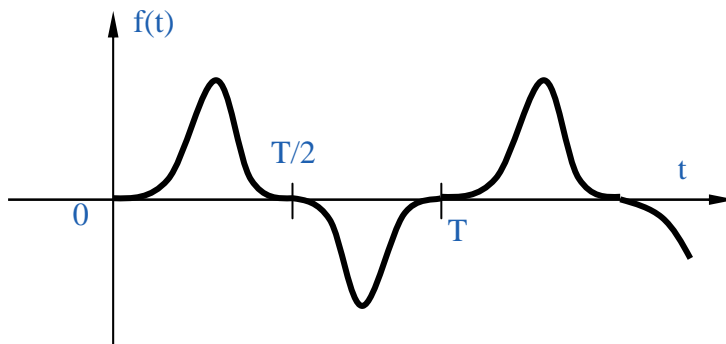
Somit lautet die entsprechende Fourier-Reihe hier:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos[(2k+1)\omega t]$$

2.2.5 Beispiele zur Berechnung der Fourier-Reihe mit symmetr. Funktion

- B6 : $f(t)$ ist ungerade und vollsymmetrisch [$f(t) = -f(t + T/2)$] :

Hier treten in der Fourier-Reihe nur ungeradzahlige Sinus-schwingungen auf



$$\frac{a_0}{2} = a_v = 0 \quad \text{und} \quad b_{2k} = 0$$

$$b_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \sin[(2k+1)\omega t] dt$$

Für die Fourier-Reihe läßt sich hier schreiben :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin[(2k+1)\omega t]$$

2.2.5 Beispiele zur Berechnung der Fourier-Reihe mit symmetr. Funktion

- B7: $f(t)$ wird auf der Zeitachse verschoben :

Beträgt die Verschiebung $\pm\Delta t$ dann gilt mit $t' = t \pm \Delta t$

$$g(t') = f(t \pm \Delta t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \{a_v \cos[v\omega(t \pm \Delta t)] + b_v \sin[v\omega(t \pm \Delta t)]\}$$

Ein einfacherer Ausdruck resultiert für die kompl. Koeffizienten:

$$f(t \pm \Delta t) \text{ ergibt } \{c_v \cdot e^{\mp jv\omega t}\}$$

Dieser Ausdruck ermöglicht es, die Fourier-Reihenentwicklung für den neuen Koordinatenursprung zu ermitteln.

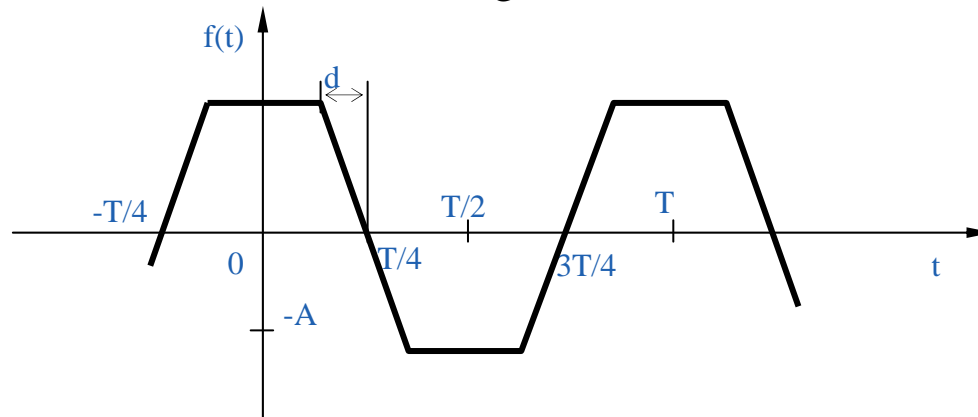
Es ist oft von Vorteil, den Koordinatenursprung zu verschieben, z.B. wenn sich damit symmetrische Eigenschaften der Funktion ergeben.



2.2.6 Fourier-Analyse

- Es besteht die Möglichkeit, eine periodische nicht-sinusförmige Funktion hinsichtlich ihres “Informationsgehaltes” auf zwei Arten darstellen:

1) Im Zeitbereich (s. folgendes Bild)



2) Im Spektralbereich (Frequenzbereich): Darstellung der Amplituden a_ν, b_ν bzw. der cos-Amplitude d_ν und der Phase ψ_ν in Abhängigkeit von der Frequenz.

2.2.6 Fourier-Analyse

Weitere Beispiele

Beispiel: Fourier-Analyse der Trapezfunktion

Diese ist gerade und vollsymmetrisch (s. B5) mit

$$\frac{a_0}{2} = a_{2k} = 0, \quad b_v = 0 \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} f(t) \cos[(2k+1)\omega t] dt$$

Für $f(t)$ gilt in der ersten Viertelperiode:

$$f(t) = \begin{cases} A = \text{const} & \text{für } 0 \leq t < \left(\frac{T}{4} - d\right) \\ \frac{A}{d} \left(\frac{T}{4} - t\right) & \text{für } \left(\frac{T}{4} - d\right) < t \leq \left(\frac{T}{4} + d\right) \end{cases}$$

$$\text{Damit resultiert: } a_{2k+1} = \frac{8}{T} \left\{ \int_0^{\frac{T}{4}-d} A \cos[(2k+1)\omega t] dt + \int_{\frac{T}{4}-d}^{\frac{T}{4}+d} \frac{A}{d} \left(\frac{T}{4} - t\right) \cos[(2k+1)\omega t] dt \right\}$$



2.2.6 Fourier-Analyse

Als Endergebnis ergibt sich (nach part. Integration etc.):

$$a_{2k+1} = \frac{4A}{\pi(2k+1)^2 \omega d} \cos\left[(2k+1)\omega\left(\frac{T}{4} - d\right)\right]$$

bzw. nach Auflösung des Arguments im \cos in zwei Ausdrücke und Umschreiben des damit resultierenden Terms $\cos(x-y)$ in \cos und \sin Produktterme:

$$a_{2k+1} = \frac{4A \sin[(2k+1)\omega d]}{\pi(2k+1)^2 \omega d} \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

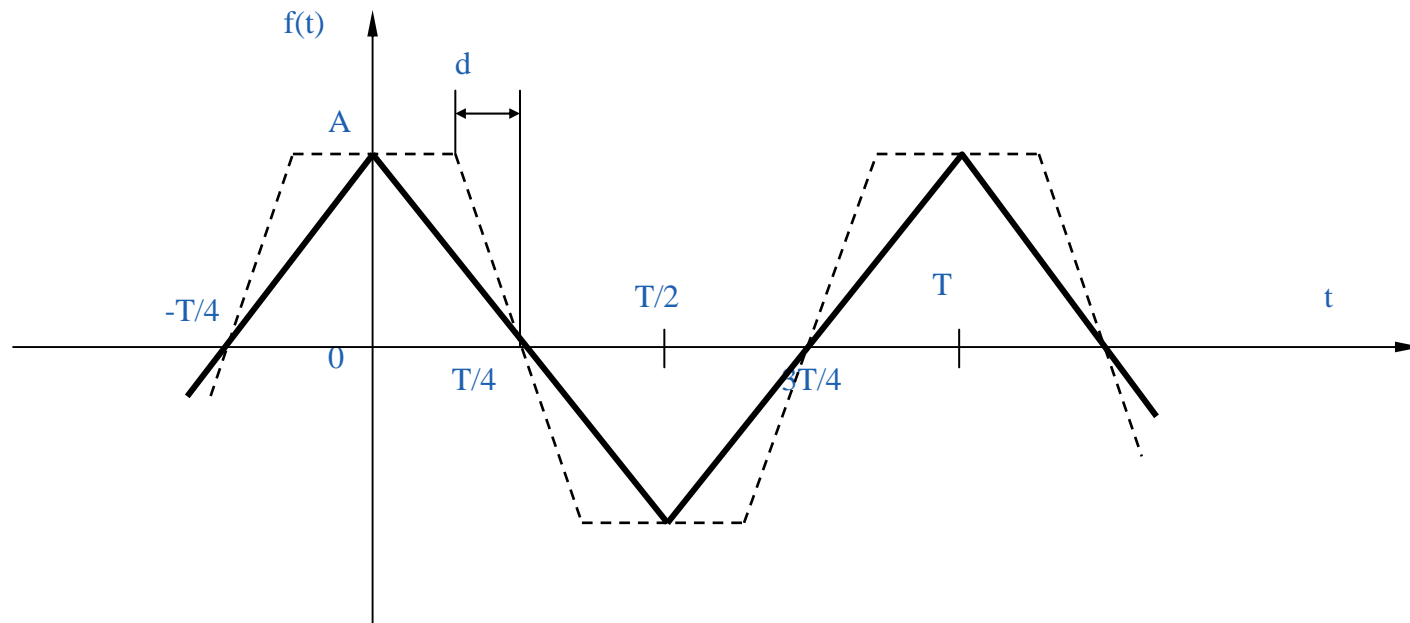
Die Fourier-Reihe der Trapezfunktion lautet damit:

$$f(t) = \frac{4A}{\pi\omega d} \left[\sin(\omega d) \cos(\omega t) - \frac{1}{9} \sin(3\omega d) \cos(3\omega t) + \frac{1}{25} \sin(5\omega d) \cos(5\omega t) \dots + \dots \right]$$



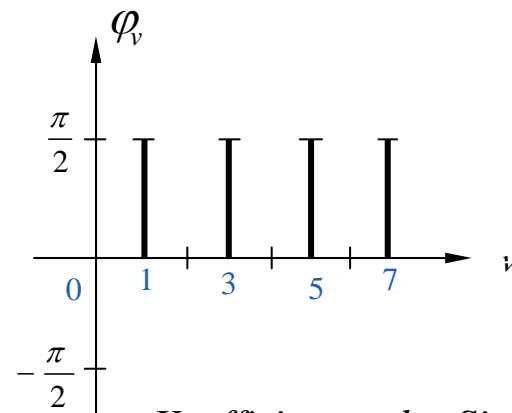
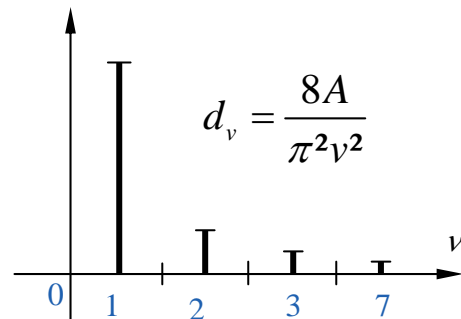
2.2.6 Fourier-Analyse

- Sonderfall 1 der Trapezfunktion : *Die Dreiecksfunktion* ($d = T/4$) :



2.2.6 Fourier-Analyse

- Dafür ergibt sich das folgende Amplituden und Phasenspektrum:



$$\nu = 2k + 1$$

Endergebnisse:

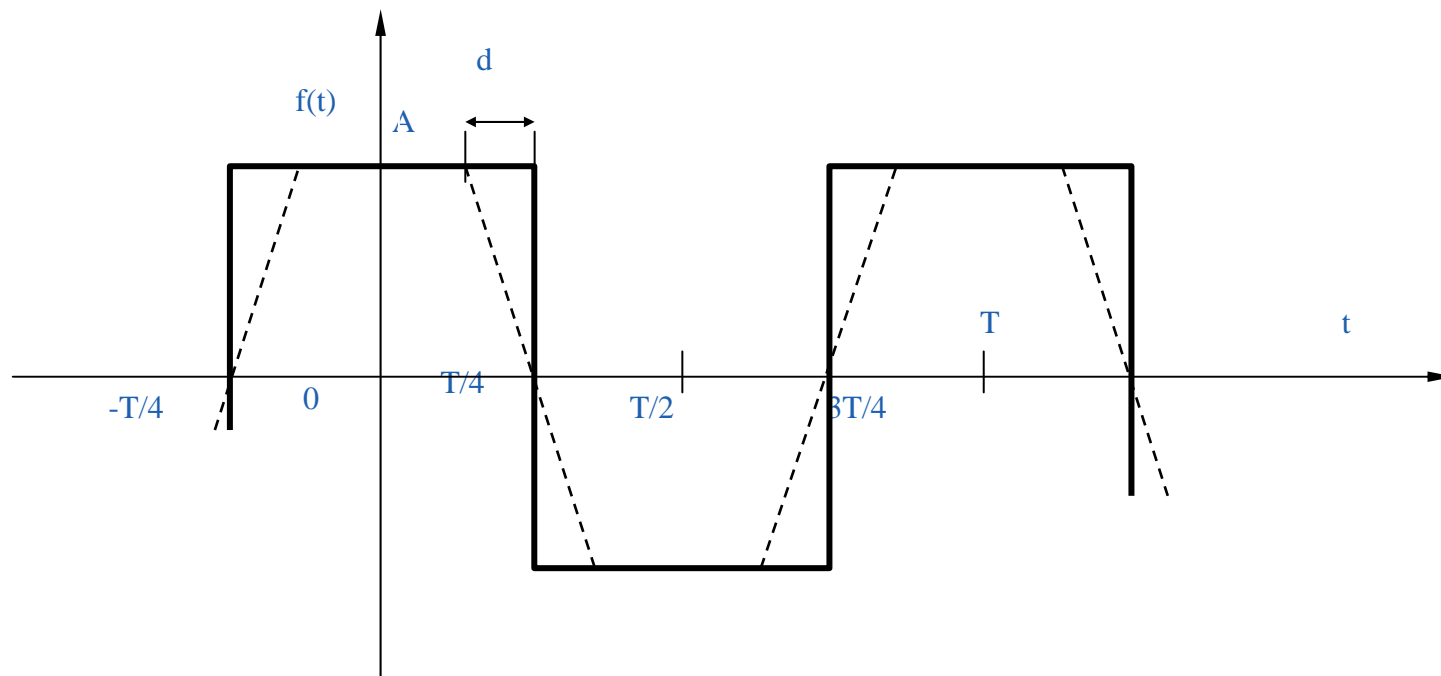
$$a_{2k+1} = \frac{8A}{\pi^2 (2k+1)^2}, \quad b_k = 0, \quad d_{2k+1} = \frac{8A}{\pi^2 (2k+1)^2}, \quad \varphi_{2k+1} = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_{2k+1} = 0$$

Koeffizienten der Sinus-Reihe erfordern

Phase von: $\frac{\pi}{2}$

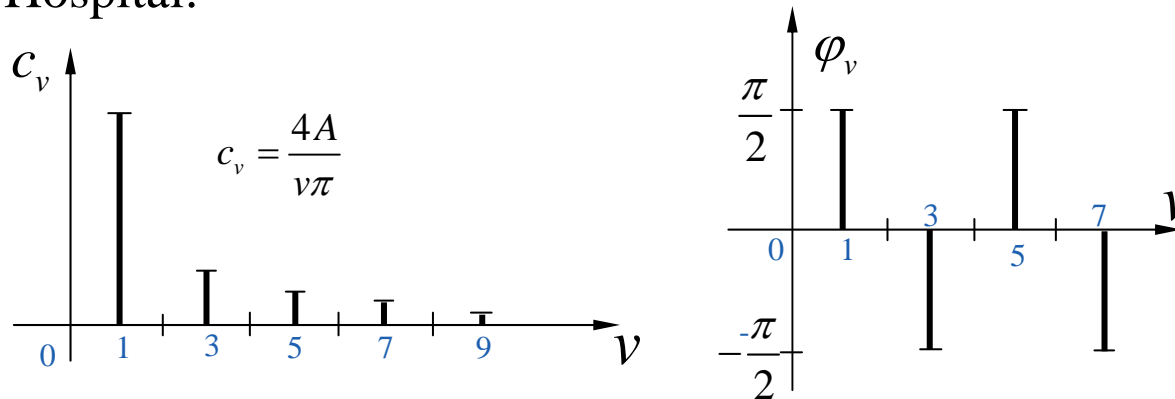
2.2.6 Fourier-Analyse

- Sonderfall 2 der Trapezfunktion : *Rechteckfunktion mit $d \rightarrow 0$*



2.2.6 Fourier-Analyse

- Bildung des Grenzüberganges mittels der Regel von Bernoulli-L'Hospital:



$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\sin[(2k+1)\omega d]}{(2k+1)\omega d} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\{\sin[(2k+1)\omega d]\}'}{\{(2k+1)\omega d\}'} = \lim_{d \rightarrow 0} \text{si}((2k+1)\omega d) = \text{si}(0) = 1$$

Damit folgt: $a_{2k+1} = \frac{4A}{\pi(2k+1)} \sin[(2k+1)\frac{\pi}{2}], \quad b_k = 0$

$$d_{2k+1} = \frac{4A}{\pi(2k+1)}, \quad \varphi_{2k+1} = \pm \frac{\pi}{2} \sin[(2k+1)\frac{\pi}{2}], \quad \psi_{2k+1} = 0$$

2.2.7 Die komplexe Form der Fourier-Reihe

- Allgemein gilt für die Fourierreihen-Darstellung

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} [a_v \cos(v\omega t) + b_v \sin(v\omega t)]$$

⇒ Ausserdem gilt: $\cos(v\omega t) = \frac{e^{jv\omega t} + e^{-jv\omega t}}{2}$ $\sin(v\omega t) = \frac{e^{jv\omega t} - e^{-jv\omega t}}{2j}$

und damit :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \left[a_v \frac{e^{jv\omega t} + e^{-jv\omega t}}{2} + b_v \frac{e^{jv\omega t} - e^{-jv\omega t}}{2j} \right]$$

bzw.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{\infty} \left[\frac{a_v + jb_v}{2} e^{-jv\omega t} + \frac{a_v - jb_v}{2} e^{jv\omega t} \right]$$



2.2.7 Die komplexe Form der Fourier-Reihe

- Nunmehr werden auch negative Werte für ν einbezogen.

Mit den Abkürzungen $\underline{c}_0 = \frac{a_0}{2}$,

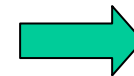
$$\underline{c}_\nu = \frac{a_\nu - jb_\nu}{2} \text{ für positive } \nu$$

$$\underline{c}_\nu = \frac{a_\nu + jb_\nu}{2} \text{ für negative } \nu$$

$$\text{Also: } c_\nu = c_{-\nu}^*$$

erhält man Paare von Koeffizienten.

Dies lassen sich in der sehr kompakten Darstellung der Fourier-Reihe in ihrer komplexen Form schreiben:



$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{c}_\nu e^{j\nu\omega t}$$

2.2.7 Die komplexe Form der Fourier-Reihe

Es gilt außerdem: $a_\nu = 2\Re(c_\nu)$ $b_\nu = -2\Im(c_\nu) \forall \nu > 0$

- Für die komplexen Koeffizienten resultieren damit die Bestimmungsgleichungen:

$$\underline{c}_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt,$$

$$\underline{c}_\nu = \frac{a_\nu - jb_\nu}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) [\cos(\nu\omega t) - j \sin(\nu\omega t)] dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-j\nu\omega t} dt,$$

$$\underline{c}_\nu = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-j\nu\omega t} dt, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$



2.2.8 Interpretation der Fourier-Koeffizienten

Es werden damit folgende Darstellungen der Fourier-Reihe benutzt:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} [a_{\nu} \cos(\nu\omega t) + b_{\nu} \sin(\nu\omega t)]$$

oder

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} e^{j\nu\omega t}$$

oder

$$f(t) = d_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_{\nu} \cos(\nu\omega t + \psi_{\nu})$$

Verabredung ab hier: c_{ν} statt \underline{c}_{ν}



2.2.8 Interpretation der Fourier-Koeffizienten

- Gleichanteil des Signals : $\frac{a_0}{2} = c_0 = d_0$
- Scheitelwerte oder Amplituden der Fourier-Komponenten: a_ν, b_ν, c_ν und d_ν
- Nullphasenwinkel (Phase) der cosinusförmigen Schwingungen: ψ_ν
- Grundschiwingung: $d_1 \cdot \cos(\omega t + \psi_1)$



2.2.9 Anwendung der Fourier-Reihe bei einem Netzwerk

- Bei cosinus-förmiger Spannung $u(t) = \hat{u} \cos(\nu\omega t + \varphi_u)$ wird üblicherweise ein komplexer Scheitelwert $\underline{\hat{u}} = \hat{u} e^{j\varphi_u}$ mit $u(t) = \text{Re}\{\underline{\hat{u}} e^{j\omega t}\}$ zugeordnet.

Nun kann man für jede periodische Funktion ansetzen:

$$u(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{u}_{\nu} e^{j\nu\omega t} \quad \text{mit} \quad \underline{u}_{\nu} = \begin{cases} \frac{1}{2} \underline{\hat{u}}_{\nu}^*, & \text{für } \nu \leq -1 \\ u_0 & \text{für } \nu = 0 \\ \frac{1}{2} \underline{\hat{u}}_{\nu}, & \text{für } \nu \geq 1 \end{cases}$$

Auch bei elektrische Netzwerken nutzt man die Darstellung (der Spannungen und Ströme) in Kosinusform:

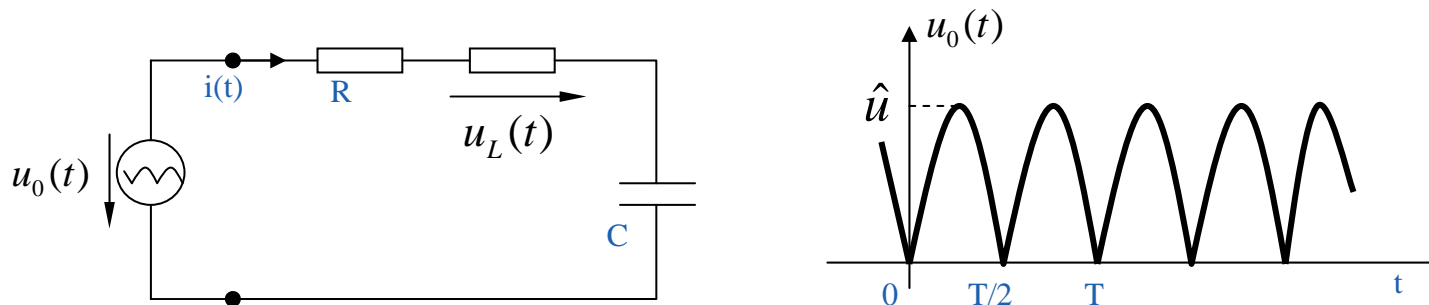
$$u(t) = u_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{u}_{\nu} \cos(\nu\omega t + \varphi_{u\nu})$$

$$i(t) = i_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{i}_{\nu} \cos(\nu\omega t + \varphi_{i\nu})$$



2.2.9 Anwendung der Fourier-Reihe bei einem Netzwerk

Beispiel-Netzwerk:
Reihen-Schwingkreis



Hier ist gegeben : $u_0(t) = \hat{u} |\sin(\omega t)|$ mit $\omega = 2\pi/T$

Daraus folgt:
$$u_0(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\hat{u}}{\pi(4k^2 - 1)} \cos(2k\omega t)$$

Zu berechnen sind : $i(t)$ und $u_L(t)$

2.2.9 Anwendung der Fourier-Reihe bei einem Netzwerk

- Lösungsansatz :

- Verwendung der Impedanz für jede Frequenz $k\omega$: $\underline{Z}_k = \frac{\hat{u}_k}{\hat{i}_k}$

- Angabe der Fourier-Reihe zu $u_0(t)$ in komplexer Form mit: $\hat{u}_k = -\frac{4\hat{u}}{\pi(4k^2 - 1)}$

→
$$u_0(t) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\hat{u}}{\pi(4k^2 - 1)} e^{j2k\omega t}$$



2.2.9 Anwendung der Fourier-Reihe bei einem Netzwerk

- Impedanz bzw. Strom des Reihen-Schwingkreises für eine bestimmte Frequenz $k\omega$:

$$\underline{Z}_k = R + jX_k \quad \text{mit} \quad X_k = k\omega L - \frac{1}{k\omega C} \quad \text{und} \quad \underline{i}_k = u_k / Z_k$$

Dann gilt für den Strom :

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i_k = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\hat{u}}{\pi(4k^2 - 1)} \cdot \frac{1}{R + jX_{2k}} e^{j2k\omega t}$$

Mit der Euler'schen Formel resultiert:

$$i(t) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\hat{u}}{\pi(4k^2 - 1)} \cdot \frac{1}{R + jX_{2k}} \cdot [\cos(2k\omega t) + j \sin(2k\omega t)]$$



2.2.9 Anwendung der Fourier-Reihe bei einem Netzwerk

- Nach einer Umformung (per konjugiert komplexer Erweiterung des Nenners) ergibt sich :

$$i(t) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\hat{u}}{\pi(4k^2 - 1)} \left[\frac{R \cos(2k\omega t) + X_{2k} \sin(2k\omega t)}{R^2 + X_{2k}^2} + j \frac{R \sin(2k\omega t) - X_{2k} \cos(2k\omega t)}{R^2 + X_{2k}^2} \right]$$

Werden die Eigenschaften der Funktionen (cos , sin) für +/- k ausgenutzt, so gilt mit $X_{-k} = -X_k$ (mit Wegfall der Imaginärteils!):

$$i(t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\hat{u}}{\pi(4k^2 - 1)} \frac{R \cos(2k\omega t) + X_{2k} \sin(2k\omega t)}{R^2 + X_{2k}^2}$$

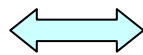


2.2.9 Anwendung der Fourier-Reihe bei einem Netzwerk

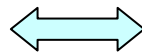
- Die Spannung an der Spule erhält man über: $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

$$u_L(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\hat{u}}{\pi(4k^2 - 1)} \frac{2k\omega L [R \sin(2k\omega t) - X_{2k} \cos(2k\omega t)]}{R^2 + X_{2k}^2}$$

Die Ergebnisse lassen sich auch in Polarform darstellen:



$$u_L(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\hat{u}}{\pi(2k^2 - 1)} \cdot \frac{2k\omega L}{\sqrt{R^2 + X_{2k}^2}} \cos\left[(2k\omega t) + \arctan\left(\frac{R}{X_{2k}}\right)\right]$$



$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\hat{u}}{\pi(2k^2 - 1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + X_{2k}^2}} \cos\left[(2k\omega t) - \arctan\left(\frac{X_{2k}}{R}\right)\right]$$



2.2.10 Formulierung der Parseval'schen Gleichung

- Betrachtet werden zwei im allgemeinen nicht-sinusförmige periodische Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ mit gleicher Periodendauer T :
- Die entsprechenden Fourier-Reihen lauten:

$$f_1(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{C}_{\nu} e^{j\nu\omega t} \quad \text{mit} \quad \underline{C}_{\nu} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_1(t) e^{-j\nu\omega t} dt$$

und

$$f_2(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \underline{D}_{\mu} e^{j\mu\omega t} \quad \text{mit} \quad \underline{D}_{\mu} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_2(t) e^{-j\mu\omega t} dt$$

- Für das Produkt beider Funktionen gilt : $f_1(t) \cdot f_2(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{C}_{\nu} e^{j\nu\omega t} \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \underline{D}_{\mu} e^{j\mu\omega t}$

und zugleich

da periodisch : $f_1(t) \cdot f_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{E}_k e^{jk\omega t} \quad \text{mit} \quad \underline{E}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_1(t) f_2(t) e^{-jk\omega t} dt$



2.2.10 Formulierung der Parseval'schen Gleichung

- Weiterhin gilt:
$$\underline{E}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{C}_{\nu} e^{j\nu\omega t} \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \underline{D}_{\mu} e^{j\mu\omega t} \right] e^{-jk\omega t} dt$$

$$\underline{E}_k = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{C}_{\nu} \left[\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \underline{D}_{\mu} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(\nu+\mu-k)\omega t} dt \right]$$

bzw.

$$\underline{E}_k = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{C}_{\nu} I \quad \text{mit} \quad I = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \underline{D}_{\mu} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(\nu+\mu-k)\omega t} dt$$

- Man kann zeigen, dass I verschieden von Null ist nur bei: $\nu + \mu - k = 0$
(wg. Orthogonalität von $\cos(nx)$ und $\sin(nx)$)

Damit wird der Integrand
identisch mit 1 und es gilt:

$$I = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \underline{D}_{\mu} \frac{1}{T} \cdot T = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \underline{D}_{\mu}$$



2.2.10 Formulierung der Parseval'schen Gleichung

↩ die Fourier-Koeffizienten des Produktes $f_1(t)f_2(t)$

$$\underline{E}_k = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{C}_{\nu} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \underline{D}_{\mu} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{C}_{\nu} \underline{D}_{k-\nu}$$

infolge $\nu + \mu - k = 0$
bzw. $\mu = k - \nu$

Bestimmung des Gleichanteils (zeitl. Mittelwert) \underline{E}_0
des Produktes $f_1(t)f_2(t)$ über $k = 0$:

$$E_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_1(t) \cdot f_2(t) dt = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{C}_{\nu} \cdot \underline{D}_{-\nu}$$

Es gibt diverse Anwendungen dieser Beziehung (Bestimmung des Integrals im Zeit- oder Frequenzbereich)!

2.2.10 Formulierung der Parseval'schen Gleichung

- Alle komplexen Fourier-Koeffizienten besitzen die Eigenschaft :

$$\underline{C}_v = \underline{C}_{-v}^* \quad \text{und} \quad \underline{D}_v = \underline{D}_{-v}^*$$

Damit läßt sich die folgende Formel umschreiben von

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_1(t) f_2(t) dt = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \underline{C}_v \underline{D}_{-v} = \sum_{v=-\infty}^{-1} \underline{C}_v \underline{D}_{-v} + \underline{C}_0 \underline{D}_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \underline{C}_v \underline{D}_{-v} = \\ & \sum_{v=1}^{\infty} \underline{C}_{-v} \underline{D}_v + \underline{C}_0 \underline{D}_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \underline{C}_v \underline{D}_{-v} = \underline{C}_0 \underline{D}_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (\underline{C}_{-v} \underline{D}_v + \underline{C}_{-v}^* \underline{D}_v^*) = \\ & = \underline{C}_0 \underline{D}_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (\underline{C}_{-v} \underline{D}_v + (\underline{C}_{-v} \underline{D}_v)^*) = \underline{C}_0 \underline{D}_0 + \sum_{v=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \{ \underline{C}_{-v} \underline{D}_v \} \end{aligned}$$

zu:

$$E_0 = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \{ \underline{C}_v^* \cdot \underline{D}_v \} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \{ \underline{C}_v \cdot \underline{D}_v^* \}$$



Dies ist die Parseval'sche Gleichung



2.2.11 Die Leistung bei nicht-sinusförmigen periodischen Netzwerkgrößen

Die elektrische Energie pro Periode (Wirkleistung) an einem ohmschen Widerstand beträgt:

$$P_W = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)i(t)dt = \frac{1}{R} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)dt = R \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)dt$$

Anwendung der Parseval'schen Gleichung für diesen Sonderfall:

$$f_1(t) = f_2(t) = f(t) \quad \text{und damit} \quad f_1(t)f_2(t) = f^2(t)$$

ergibt:
$$E_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)dt = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \{ \underline{C}_\nu \underline{C}_\nu^* \} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ |\underline{C}_\nu|^2 e^{j(\angle \underline{C}_\nu - \angle \underline{C}_\nu)} \right\}$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\underline{C}_\nu|^2 = C_0^2 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |\underline{C}_\nu|^2$$



2.2.11 Die Leistung bei nicht-sinusförmigen periodischen Netzwerkgrößen

- Mit $c_0 = \frac{a_0}{2} = C_0$, $c_\nu = \underline{C}_\nu = \frac{a_\nu - jb_\nu}{2}$ $\nu \geq 1$ folgt:

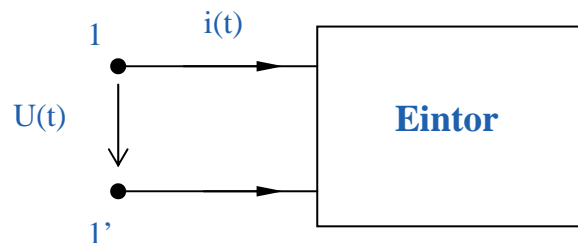
$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt = c_0^2 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu^2 + b_\nu^2}{4} = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu^2 + b_\nu^2}{2}$$

Wenn $f(t)$ Spannungs- oder Stromcharakter hat, werden die entsprechenden Spektralgrößen a_ν, b_ν und c_ν die Wirkleistungsverhältnisse des entsprechenden Netzwerkelementes beschreiben.



2.2.11 Die Leistung bei nicht-sinusförmigen periodischen Netzwerkgrößen

Betrachtet wird nun ein Eintor (nicht nur ohmsch) mit nicht-sinusförmigen periodischen Netzwerkgrößen $u(t)$ und $i(t)$:



$$u(t) = f_1(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{C}_{\nu} e^{j\nu\omega t}$$

und

$$i(t) = f_2(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{D}_{\nu} e^{j\nu\omega t}$$

Für die Wirkleistung gilt:

$$\begin{aligned} P_W &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)i(t)dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_1(t)f_2(t)dt = C_0D_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{\underline{C}_{\nu}^* \underline{D}_{\nu}\} \\ &= C_0D_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{\underline{C}_{\nu} \underline{D}_{\nu}^*\} \end{aligned}$$

2.2.11 Die Leistung bei nicht-sinusförmigen periodischen Netzwerkgrößen

Unter Berücksichtigung der Zusammenhänge entsprechend S. 40

$$C_0 = U_0 \quad , \quad D_0 = I_0 \quad , \quad \underline{C}_\nu = \frac{1}{2} \hat{u}_\nu \quad , \quad \underline{D}_\nu = \frac{1}{2} \hat{i}_\nu$$

folgt :

$$P_W = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \hat{u}_\nu^* \cdot \hat{i}_\nu \right\} = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \hat{u}_\nu \cdot \hat{i}_\nu^* \right\}$$

Damit ist die Gesamtleistung über die Summe aller Einzelleistungen jeder Spektrallinie zu bestimmen!



2.2.12 Die Beurteilung der Abweichung vom sinusförmigen Verlauf periodischer Funktionen

Definition des Effektivwerts einer periodischen Funktion:

$$f(t)_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt}$$

Die Parseval'sche Gleichung gestattet die Bestimmung des Effektivwerts über die Fourier-Koeffizienten (bzw. über die zugehörigen Effektivwerte):

$$f(t)_{eff} = \sqrt{\sum_{v=-\infty}^{\infty} |c_v|^2}$$



2.2.12 Die Beurteilung der Abweichung vom sinusförmigen Verlauf periodischer Funktionen

- Der Effektivwert für eine periodische Spannung $u(t)$ beträgt:

$$U_{eff} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\hat{u}_{\nu}}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{\sum_{\nu=0}^{\infty} U_{eff \nu}^2}$$

U_0 : Gleichanteil von $u(t)$

\hat{u}_{ν} : Scheitelwert

$U_{eff \nu} = \hat{u}_{\nu} / \sqrt{2}$: Effektivwert der ν -ten Teilspannung (Frequenz: $\nu\omega$)

- Der Effektivwert für einen periodischen Strom beträgt sinngemäß:

$$I = I_{eff} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\hat{i}_{\nu}}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{\sum_{\nu=0}^{\infty} I_{eff \nu}^2}$$

2.2.12 Die Beurteilung der Abweichung vom sinusförmigen Verlauf periodischer Funktionen

Bei reinen Wechselgrößen, also ohne Gleichanteil gilt: $a_0 = 0$

Ansonsten ist $f(t)$ eine Mischgrösse
(Gleichanteil und Wechselanteil der nicht-periodischen Funktion $f(t)$
ist zugleich vorhanden).

Also gilt für Mischgrößen: $\frac{a_0}{2} \neq 0$

Dafür ist der Schwingungsgehalt s definiert (Anteil AC am Gesamtsignal):

$$s = \frac{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} U_{eff \nu}^2}}{U_{eff}} = \frac{\sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} U_{eff \nu}^2}}{\sqrt{\sum_{\nu=0}^{\infty} U_{eff \nu}^2}}$$



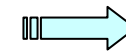
2.2.12 Die Beurteilung der Abweichung vom sinusförmigen Verlauf periodischer Funktionen

Die Abweichung vom sinusförmigen Ablauf kann durch den Grundschwingungsgehalt g beschrieben werden:

$$g = \frac{U_{eff1}}{U_{eff-}} = \frac{U_{eff1}}{\sqrt{\sum_{v=1}^{\infty} U_{effv}^2}}$$

Der Oberschwingungsgehalt k (Klirrfaktor) beträgt:

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{v=2}^{\infty} U_{effv}^2}}{U_{eff-}} = \frac{\sqrt{\sum_{v=2}^{\infty} U_{effv}^2}}{\sqrt{\sum_{v=1}^{\infty} U_{effv}^2}}$$



$$g^2 + k^2 = 1$$

2.2.12 Die Beurteilung der Abweichung vom sinusförmigen Verlauf periodischer Funktionen

Zusätzlich gibt es weitere Definitionen mit Formfaktor und Scheitelfaktor:

Formfaktor :

$$k_f = \frac{\sqrt{\sum_{v=0}^{\infty} U_{eff\ v}^2}}{\frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt}$$

Scheitelfaktor für Signale ohne Gleichanteil:

$$k_a = \frac{u(t)_{\max}}{\sqrt{\sum_{v=1}^{\infty} U_{eff\ v}^2}}$$

Bei rein sinusförmigen Verlauf erhält man:

$$k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11 \quad \text{und} \quad k_a = \sqrt{2} = 1,41$$

2.2.13 Zusätzliche Eigenschaften der Fourier-Reihe

- **Linearität** $k \cdot s(t)$ ergibt Reihe mit $k \cdot c_v$
 $a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t)$ ergibt Reihe mit $a \cdot c_{v1} + b \cdot c_{v2}$
- **Zeitverschiebung** $s(t - t_1)$ ergibt Reihe mit $c_v \cdot e^{-jv\omega t_1}$
- **Spiegelung** $s(-t)$ ergibt Reihe mit c_v^*



Grundlagen der Elektrotechnik 3

Kapitel 2.3

Beschreibung aperiodischer Zeitvorgänge mittels der Fourier-Transformation

Prof. Dr.-Ing. I. Willms

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Grundlagen der Elektrotechnik 3

Fachgebiet
Nachrichtentechnische Systeme

S. 77

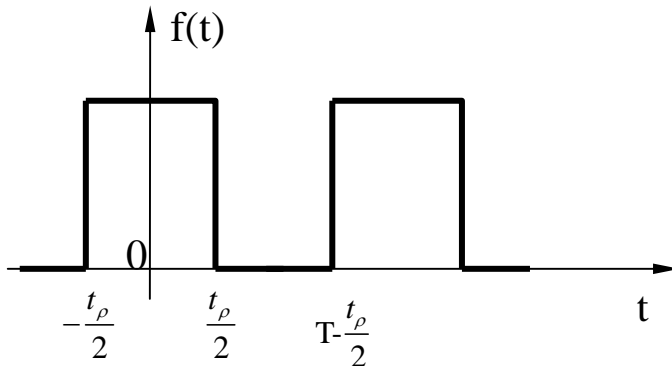


2.3.1 Vorbemerkungen

Ansatz: Entwicklung der Fourier-Transformation aus der Fourier-Reihe durch Überführung periodischer Funktion in aperiodischen Impuls

Beispiel : Betrachtet wird ein periodischer Rechteckimpuls

$u(t)$ sei hier eine gerade Funktion



$$u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für } -\frac{t_p}{2} < t < \frac{t_p}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es soll eine Fourier-Analyse dieses Signals durchgeführt werden



2.3.1 Vorbemerkungen

- Lösung :

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{t=-\frac{t_i}{2}}^{t=+\frac{t_i}{2}} U_0 dt = \frac{U_0 t_i}{T}$$

$$\underline{c}_v = \frac{a_v - jb_v}{2} \Big|_{b_v=0} = \frac{a_v}{2} = \frac{1}{T} \int_{t=-\frac{t_i}{2}}^{t=\frac{t_i}{2}} U_0 \cos(v\omega t) dt = \frac{U_0}{T} \frac{\sin(v\omega t)}{v\omega} \Big|_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}}$$



mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\underline{c}_v = \frac{U_0}{T} \frac{\sin\left(\frac{2\pi v t_i}{T} \frac{t_i}{2}\right) - \sin\left[\frac{2\pi v}{T} \left(-\frac{t_i}{2}\right)\right]}{v\omega} = \frac{U_0 t_i}{T} \frac{\sin\left(v\pi \frac{t_i}{T}\right)}{v\pi \frac{t_i}{T}}$$



2.3.1 Vorbemerkungen

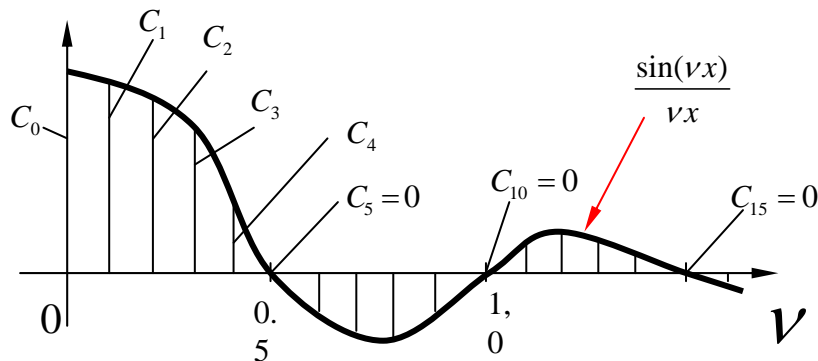
bzw:

$$a_v = 2c_v = 2 \frac{U_0 t_i}{T} \frac{\sin\left(v\pi \frac{t_i}{T}\right)}{v\omega \frac{t_i}{T}} = 2 \frac{U_0 t_i}{T} \text{si}\left(v\omega \frac{t_i}{T}\right)$$

Damit
gilt:



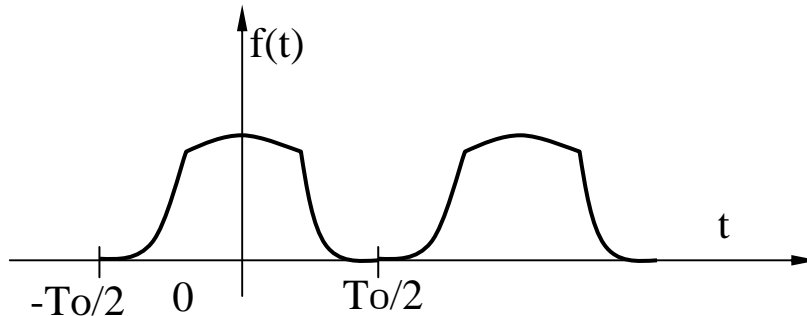
$$u(t) = \frac{U_0 t_i}{T} \sum_{v=-\infty}^{v=\infty} \text{si}\left(v\pi \frac{t_i}{T}\right) e^{jv\omega t}$$



Skizze des Spektrums von $u(t)$ für den Fall $\frac{t_i}{T} = 0,2$

2.3.2 Das Fourier-Integral

- Im folgenden wird weiter die Fourier-Reihe einer periodischen Funktion $f(t)$ untersucht. Die Periode sei hier: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$



$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \underline{c}_{\nu} e^{j\nu\omega_0 t}$$

Dabei sollen die nachstehenden Voraussetzungen gemacht werden :

- 1) $f(t)$ sei stetig
- 2) In jeder endlichen Periodendauer $-\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2}$ möge die Funktion den Dirichlet'schen Bedingungen genügen
- 3) Bei beliebiger Periodendauer sei $f(t)$ absolut integrierbar



2.3.2 Das Fourier-Integral

Die folgende Darstellung geht aus von einem periodischem Signal welches in ein nicht-periodisches Signals überführt wird. Ansatz: Vergrößerung der Periodendauer - also per: $\lim_{T_0 \rightarrow \infty}$

Jeder Term in komplexer Fourier-Reihe entspricht einer Linie im Spektrum. Die Linienabstände betragen: $\omega_0 = 2\pi / T_0$

In einem Intervall $\Delta\omega$ um einen beliebigen Frequenzpunkt ω liegen m Linien mit der Anzahl:

$$m = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{T_0}{2\pi} \Delta\omega$$

Bei genügend kleinem Intervall resultiert dann nur geringer Unterschied der m einzelnen Terme der komplexer Fourier-Reihe zueinander. Konsequenz: Zusammenfassung dieser Terme ist erlaubt!



2.3.2 Das Fourier-Integral

- In jedem Intervall mit m Linien gilt damit für dessen Beitrag zur Reihe:

$$m \cdot \underline{c}_v e^{jv\omega_0 t} = \frac{T_0}{2\pi} \Delta\omega \cdot \underline{c}_v e^{jv\omega_0 t}$$

Für $T_0 \rightarrow \infty$ kann man dann die Intervalle infinitesimal klein wählen
(wenn m unverändert bleiben soll)

Damit ergibt sich für den Beitrag jedes Intervalls zur Reihe:

$$\frac{T_0}{2\pi} d\omega \cdot \underline{c}_v e^{jv\omega_0 t} \text{ mit } v\omega_0 \rightarrow \omega \text{ daher: } \frac{T_0}{2\pi} \underline{c}_v e^{j\omega t} d\omega$$

Außerdem läßt sich abkürzend schreiben: $T_0 \underline{c}_v = F(\omega)$

Insgesamt resultiert damit:
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



2.3.2 Das Fourier-Integral

Es gilt also:
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{mit} \quad \underline{c}_v = \frac{1}{T_0} \int_{t=t_0}^{t=t_0+T_0} f(t) e^{-jv\omega t} dt$$

Nunmehr folgt wegen $T_0 \underline{c}_v = F(\omega)$ und $\lim_{T_0 \rightarrow \infty}$:

Das Fourierspektrum bzw. die Fourier Transformierte der Funktion $f(t)$ kann auch dargestellt werden über:

Das Symbol dazu:

$$\underline{\mathcal{F}}\{f(t)\} = \underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) \circ \text{---} \bullet \underline{F}(\omega)$$

2.3.3 Die Fourier-Rücktransformation

Die Funktion $f(t)$ lässt sich also mittels ihres Fourierspektrums darstellen über:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Die (Rück)Transformation zwischen Bildbereich und

Originalbereich kennzeichnet man so: $\underline{F}(\omega) \bullet \longleftrightarrow \circ f(t)$

$\underline{F}(\omega)$ hat nicht Amplitudencharakter (wie bei F.-Reihe), sondern es ist eine Amplitudendichte mit der Dimension :

Amplitude x Zeit oder $\frac{\text{Amplitude}}{\text{Frequenz}}$

Die Existenz des Fourier-Integrals ist dann gesichert wenn $f(t)$ absolut integrierbar ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \leq S = \text{const}$$



2.3.4 Interpretation und Zusammenfassung

Betrachtung eines Signals $s(t)$ aus dem per idealer BP-Filterung nur Anteile innerhalb eines bestimmten Frequenzbandes extrahiert werden. Die Filterung erfolge so schmalbandig, dass sich darin das Spektrum (und die Exponentialfunktion) nur unwesentlich ändert. Für diesen extrahierten Anteil $g(t)$ folgt:

$$\begin{aligned}g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &\approx \frac{\Delta\omega}{2\pi} (S(-\omega_0) e^{-j\omega_0 t} + S(\omega_0) e^{j\omega_0 t}) \\ &= \frac{\Delta\omega}{\pi} \operatorname{Re}\{S(\omega_0) e^{j\omega_0 t}\} \quad \text{wegen } S(-\omega_0) = S^*(\omega_0) \\ &= \frac{\Delta\omega}{\pi} \operatorname{Re}\{|S(\omega_0)| e^{j\angle S(\omega_0)} e^{j\omega_0 t}\} = \frac{\Delta\omega}{\pi} |S(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \angle S(\omega_0))\end{aligned}$$



2.3.4 Zusammenfassung und Interpretation

- Die Fouriertransformation ist (unter gegebenen Vorr.) also unter Bezug auf die betrachtete Bandbreite und bei der betrachteten Frequenz ein Maß für die Amplitude und die Phasenlage einer Signalanteils (Signalkomponente).
- Die Anwendung der Fouriertransformation erlaubt:
 - 1) **Ein im Zeitbereich bekanntes Signal gleichwertig im Frequenzbereich über die zugeordnete Fouriertransformation zu beschreiben**
 - 2) **Aus einer bekannten Fourier-Transformierten die Zeitfunktion zurückzugewinnen**

Die Fouriertransformation ist ein wichtiges Werkzeug der Elektrotechnik, Regelungstechnik, Physik (Optik, Mechanik , ...).

Zugleich bildet diese die Grundlage der Laplace-Transformation, Z-Transformation und der diskreten Fouriertransformation incl. der FFT.

