Grundlagen der Elektrotechnik 3

Kapitel 3.1

Schaltvorgänge - Die Laplace Transformation

Prof. Dr.-Ing. I. Willms

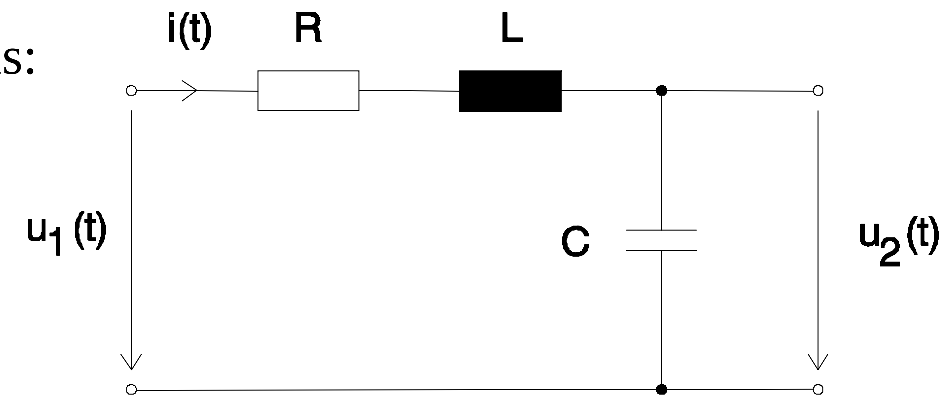
UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Fachgebiet
Nachrichtentechnische Systeme
NTS

3.1.1 Einführung

Nutzung einer komplexen Kreisfrequenz *p* für Zeitsignale. Es gilt: $p = \sigma + j\omega$

Damit sind neben zeitlich konstanten auch exponentielle Hüllkurven für sinusförmige Zeitfunktionen darstellbar:

Beispiel zu RLC-Schwingkreis:



$$u_1(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{u}}_1 e^{pt}\right\}$$
$$u_2(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{u}}_2 e^{pt}\right\}$$
$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{i}} e^{pt}\right\}$$

3.1.1 Einführung

Eine Netzwerkanalyse zeigt hier im Zeitbereich, daß gilt:

$$u_1(t) = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(z)dz$$

$$\Rightarrow u_1(t) = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(z)dz + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(z)dz \quad \Bigg| \; u_2(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(z)dz$$

Lösung kann erfolgen über :

- Lösung der Integro-Differentialgleichungen
- die Laplace-Transformation

3.1.2 Definition der Laplace-Transformation

Gegeben sei: $$f(t) = g(t)\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r \quad -\infty \le t < 0 \\ g(t) & f\ddot{u}r \quad 0 < t \le +\infty \end{cases}$$

f(t) soll folgende Eigenschaften aufweisen :

1) *f(t)* hat endliche Sprünge im Intervall $0 < t_1 \le t \le t_2$

2) $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ ist beschränkt

3) Für $t \to \infty$ soll gelten: $\lim_{t\to\infty} f(t) \to e^{-\sigma_0 t}$ $\quad\sigma_0$ ist hier beliebige positive Zahl

Wenn diese Bedingungen erfüllt werden $\Rightarrow$

existiert die Laplace-Transformierte der Funktion *f(t)*

$$\boxed{\mathfrak{L}\{f(t)\} = \mathfrak{L}\{g(t)\} = \underline{G}(p) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt}$$

3.1.2 Definition der Laplace-Transformation

Die Zuordnung von Zeit und Bildfunktion <u>Korrespondenz</u> wird u.a. durch die Symbolik nach DOETSCH beschrieben:

$$g(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \underline{G}(p) \qquad \underline{G}(p) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; g(t)$$

Verwandschaft mit Fourier-Transformation ist gegeben für:

- kausale Zeitfunktionen und zugleich
- Zeitfunktionen nach Multiplikation mit der Funktion $e^{-\sigma t}$

Dies führt im Integrand der Fourier-Transf. zu einem Term $s(t) \cdot e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} = s(t) e^{-pt}$

Grundlegende Beziehungen zur Laplace-Transformation:

$$L\{s(t)\} = \int_0^\infty s(t) e^{-pt} dt = S(p)$$

$$L^{-1}\{S(p)\} = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} S(p) e^{pt} dp = s(t)$$

3.1.3 Methoden zur Bestimmung der Originalfunktion aus der Bildfunktion

Direkte Methode:

Die Originalfunktion kann entsprechend der Beziehung

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} \underline{G}(p) e^{pt} dp$$

für t > 0

auf direkten Wege bestimmt werden. Die Benutzung dieser Formel erfordert allerdings einige Kenntnisse der Funktionen-Theorie.

3.1.3 Methoden zur Bestimmung der Originalfunktion aus der Bildfunktion

Nutzung von Transformations-Tabellen:

Beispiel: In einem Netzwerk gelte für die Bildfunktion des Stromes:

$$\mathfrak{L}\{i(t)\} = \frac{U_0}{R}\frac{1}{p(1+\tau p)} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Gesucht ist die Originalfunktion des Stromes i(t).

Lösung: Aus einer Transformations-Tabelle erhält man:

$$\left(1-e^{-\frac{t}{a}}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{p(1+ap)}$$

Mit $a \triangleq \tau$ gilt dann für die Originalfunktion: $i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

3.1.3 Methoden zur Bestimmung der Originalfunktion aus der Bildfunktion

Die Methode der Partialbruchzerlegung :

Es wird angenommen daß sich die Bildfunktion $\underline{G}(p)$ in einer gebrochenen rationalen Funktion darstellen läßt :

$$\underline{G}(p) = \frac{\underline{Z}(p)}{\underline{N}(p)}$$

Ordnung des Zählerpolynoms $\underline{Z}(p)$ < Ordnung des Nennerpolynoms $\underline{N}(p)$

Die einzelnen Partialbrüche haben dabei die Form:

$$\frac{\underline{A}_\nu}{(p - p_\nu)^k} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Wird nun zu jedem Partialbruch die jeweilige Originalfunktion bestimmt, so ergibt sich als Summe dieser die Originalfunktion $g(t)$.

3.1.3 Methoden zur Bestimmung der Originalfunktion aus der Bildfunktion

Der Heavisidesche Entwicklungssatz:

➡ Voraussetzungen : $\underline{G}(p)$ sei eine gebrochene rationale Funktion,
Der Nennergrad sei höher als der Zählergrad ,
Das Nennerpolynom besitzt nur n einfache Nullstellen ($k=1$)

So gilt:

$$\underline{G}(p) = \frac{\underline{Z}(p)}{\underline{N}(p)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\underline{A}_\nu}{p-p_\nu}$$

$$(p-p_\nu)\cdot\underline{G}(p) = \frac{(p-p_\nu)\underline{Z}(p)}{\underline{N}(p)} = (p-p_\nu)\left(\frac{\underline{A}_1}{p-p_1} + \frac{\underline{A}_2}{p-p_2} + \ldots + \frac{\underline{A}_\nu}{p-p_\nu} + \ldots + \frac{\underline{A}_n}{p-p_n}\right)$$

$$(p-p_\nu)\cdot\underline{G}(p) = \frac{(p-p_\nu)\cdot\underline{Z}(p)}{\underline{N}(p)} = \underline{A}_\nu \quad \text{für Grenzübergang mit } p \to p_\nu$$

3.1.3 Methoden zur Bestimmung der Originalfunktion aus der Bildfunktion

Zur weiteren Bestimmung muß nun die L'Hospitalsche Regel angewendet werden, falls nicht Linearfaktorform vorliegt, weil sich dann der Term *(p-p$_\nu$)* einfach kürzen lässt. Ansonsten ist also anzusetzen:

$$\underline{A}_\nu = \lim_{p \to p_\nu} \frac{\frac{d}{dp}\left[(p-p_\nu)\underline{Z}(p)\right]}{\frac{d}{dp}\left[\underline{N}(p)\right]} = \lim_{p \to p_\nu} \frac{\underline{Z}(p) + \overbrace{(p-p_\nu)}^{0}\underline{Z}^{'}(p)}{\underline{N}^{'}(p)}$$

Es gilt also :

$$\boxed{\underline{A}_\nu = \lim_{p \to p_\nu} \frac{\underline{Z}(p)}{\underline{N}^{'}(p)}}$$

Wegen der Korrespondenz

$$e^{p_\nu t} \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{p-p_\nu}$$

berechnet sich die Originalfunktion zu

$$\boxed{g(t) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu e^{p_\nu t}}$$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Fachgebiet Nachrichtentechnische Systeme

NTS

3.1.3 Methoden zur Bestimmung der Originalfunktion aus der Bildfunktion

Der modifizierte Heavisidesche Entwicklungssatz:

Es mögen weiterhin die oben gemachten Voraussetzungen gelten. Zusätzlich möge das Nennerpolynom eine Nullstelle im Ursprung besitzen. Somit gilt:

$$\underline{G}(p) = \frac{\underline{Z}_1(p)}{p \cdot \underline{N}_1(p)} \quad \text{mit} \quad p_1 = 0$$

Für die Originalfunktion ergibt sich dann :

$$g(t) = \frac{\underline{Z}_1(0)}{\underline{N}_1(0)} + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\underline{Z}_1(p_\nu)}{p_\nu \underline{N}_1^{'}(p_\nu)} . e^{p_\nu t}$$

Beispiel: In einem Netzwerk sei die Bildfunktion eines Zweigstromes:

$$\mathfrak{L}\{i_Z(t)\} = \frac{U}{L} . \frac{p + 1/\tau}{p\left[p^2(1-k^2) + 2\, p/\tau + 1/\tau^2\right]}$$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Fachgebiet
Nachrichtentechnische Systeme
NTS

3.1.3 Methoden zur Bestimmung der Originalfunktion aus der Bildfunktion

- **Lösung zu:** $i_Z(t)$

$$\underline{Z}_1(p) = p + \frac{1}{\tau}$$

$$\underline{N}_1(p) = p^2(1-k^2) + 2\frac{p}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} \quad ; \quad \underline{N}_1^{'}(p) = 2\left[p(1-k^2) + {}^1\!/_{\tau}\right]$$

p_2 und p_3 seien hier die Nenner-Nullstellen.

Damit gilt :

$$i_Z(t) = \frac{U}{L}\left[\frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau^2}} + \frac{p_2 + \frac{1}{\tau}}{2p_2\left[p_2(1-k^2) + \frac{1}{\tau}\right]} e^{p_2 t} + \frac{p_3 + \frac{1}{\tau}}{2p_3\left[p_3(1-k^2) + \frac{1}{\tau}\right]} e^{p_3 t}\right]$$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Fachgebiet Nachrichtentechnische Systeme

NTS

Grundlagen der Elektrotechnik 3

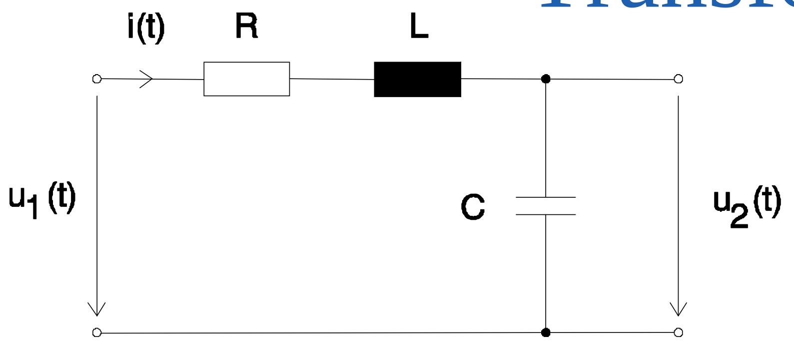
Kapitel 3.2

Schaltvorgänge -

Berechnungsmethoden für Schaltvorgänge

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Fachgebiet
Nachrichtentechnische Systeme
NTS

3.2. Anwendung der Laplace-Transformation



$$u_1(t) = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(z)dz$$

$$\Rightarrow u_1(t) = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(z)dz + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(z)dz \quad \Big| \quad u_2(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(z)dz$$

$$U_1(p) = I(p)R + L\left[pI(p) - i(0)\right] + \frac{1}{C}\frac{I(p)}{p} + \frac{u_2(0)}{p}$$

$$= I(p)R + pLI(p) + \frac{1}{pC}I(p) - i(0)L + \frac{u_2(0)}{p}$$

3.2. Anwendung der Laplace-Transformation

- Auflösen nach den Transformierten für Strom und Spannung ergibt dann für den quellenlosen Fall:

$$U_1(p) = I(p) \cdot (R + pL + 1/pC)$$

$$I(p) = \frac{U_1(p)}{R + pL + 1/pC}$$

$$\Rightarrow i(t) = L^{-1}\left\{\frac{U_1(p)}{R + pL + 1/pC}\right\}$$

Zum Vergleich:

NW-Analyse hätte ergeben:

$$\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{i}}\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)$$

3.2. Anwendung der Laplace-Transformation

Vorgehen für allgemeine Lösung im Netzwerk:

1. NW-Analyse im Zeitbereich ⇒ Systeme von Integro-Differentialgleichungen (häufig höherer Ordnung)

2. Laplace-Transformation der Integro-Differentialgleichungs-Systeme nach Vorgabe der Anfangswerte bei $t = 0$ und Bestimmung der Laplace-Transformierten der gegebenen Größen

3. Auflösung nach Laplace-Transformierten der gesuchten Größen mittels Algebra-Umformung

4. Rücktransformation zu den gesuchten Größen.

Grundlagen der Elektrotechnik 3

Kapitel 3.3

Berechnung der Einschaltvorgänge mit Hilfe von Differentialgleichungen und der Laplace-Transformation

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

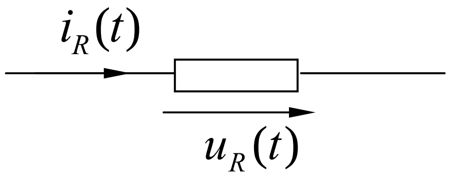
Fachgebiet
Nachrichtentechnische Systeme

NTS

3.3.1 Einführung

Wiederholung zu Netzwerkelementen bezüglich Strom, Spannung, Energie *W* bzw. Augenblicksleistung *p(t)* :

1) Ohmscher Widerstand :

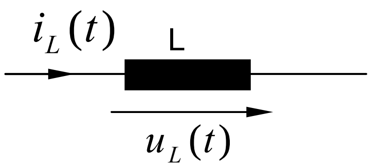


$$u_R(t) = Ri_R(t)$$

$$W = \int p(t)dt = \int u(t)i(t)dt$$

3.3.1 Einführung

2) Induktivität :

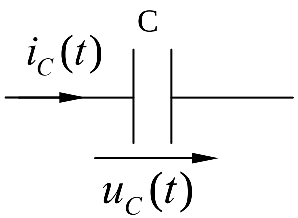


$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad oder$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)d\tau$$

$$\mathrm{W}_{\mathrm{magn}} = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} L\frac{di}{dt}i(t)dt = L\int_{0}^{i_L(t)} idi = \frac{1}{2}Li_L(t)^2$$

3) Kapazität :



$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

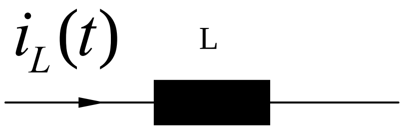
$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$W_{el} = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau = C\int_{o}^{u_C(t)} udu = \frac{1}{2}Cu_C(t)^2$$

3.3.1 Einführung

Im Netzwerk sind nur <u>endliche Spannungen</u> und <u>Ströme</u> möglich.

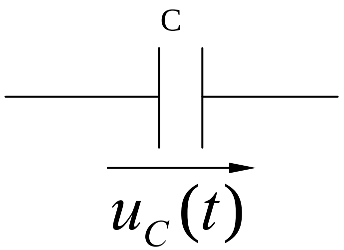
Also: Keine sprunghafte Änderung der Energie der Netzwerkelemente



i_L kann sich nicht sprunghaft ändern

(i_L ist stetig)

$$i_L(t-\Delta t) = i_L(t+\Delta t)\Big|_{\text{für} \quad \Delta t \to 0} \qquad t = 0 \rightarrow i_L(t=-0) = i_L(t=+0)$$



u_C kann sich nicht sprunghaft ändern

(u_C ist stetig)

$$u_C(t-\Delta t) = u_C(t+\Delta t)\Big|_{\text{für} \quad \Delta t \to 0} \qquad t = 0 \rightarrow u_C(t=-0) = u_C(t=+0)$$

3.3.2 Die Methode der Differentialgleichungen

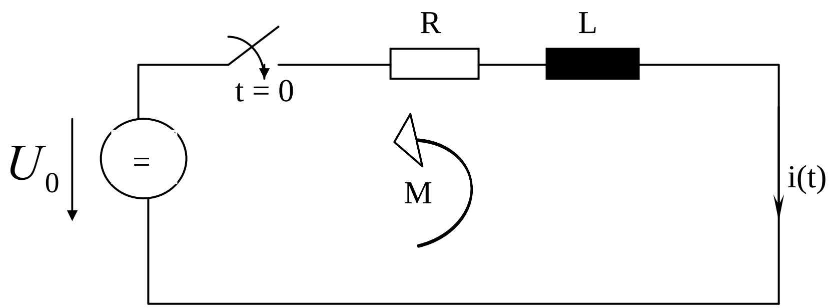
- Kirchhoff'sche Gleichungen führen zu Differentialgleichungen
- Diese Gleichungen haben konstante Koeffizienten
- Deren Lösungen liefern die gesuchten Netzwerkgrößen
- 1. Schritt: Lösung des System der homogenen Differentialgleichungen
  (representieren die Eigenschwingungen des Netzwerks)
- 2. Schritt: Hinzufügen jeweils einer partikulärer Lösung.
  Dadurch wird allgemeine Lösung des Systems der inhomogenen Differentialgleichungen erhalten:

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \qquad u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

Bei Netzwerk mit Gleichstrom – oder konstanter sinusförmiger Erregung, beschreiben partikuläre Lösungen des inhomogenen Systems die eingeschwungenen Zustände im Zeitpunkt $t \to \infty$.

3.3.2 Die Methode der Differentialgleichungen

Beispiel 1 : Anschaltung einer Gleichspannung an eine „RL - Schaltung " .



Zum Zeitpunkt t = 0 soll das Netzwerk an eine Quelle gelegt werden. Zu berechnen ist der Strom i(t) mit der Anfangsbedingung:

$i(t=-0)=0$

Lösung : Für t $\geq$ 0 gilt :

$$\boxed{Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=U_0}$$

➡ Die Differentialgleichung ist eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, welche inhomogen ist.

3.3.2 Die Methode der Differentialgleichungen

A) Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0$$

Ansatz : $\quad i_h(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow \frac{di_h(t)}{dt} = -\frac{K}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$-\frac{K}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R}{L}Ke^{-\frac{t}{\tau}} = (\frac{-1}{\tau} + \frac{R}{L})Ke^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \text{ mit } \tau = \frac{L}{R}$$

τ wird als Zeitkonstante des Einschaltvorganges bezeichnet

K ist hier noch nicht bestimmbar.

3.3.2 Die Methode der Differentialgleichungen

- Die Zeitkonstante ist der Kehrwert des Koeffizienten von *i(t)* der homogenen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} i(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad i_h(t) = K e^{-\frac{R}{L}t}$$

B) Partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

Nach unendlich langer Zeit ($t \to \infty$) wird die Spule L magnetisch aufgeladen sein. Dann verschwindet die Spannung, d.h der Strom *i(t)* nimmt den Wert an:

$$i_p(t) = \frac{U_0}{R} \quad \neq \quad f(t) \quad für \quad t \to \infty$$

Dies entspricht dem Fall: $\frac{di_L(t)}{dt} = 0 \; , \; d.h. \; : \; u_L = 0$

3.3.2 Die Methode der Differentialgleichungen

C) Lösung der gesamten Einschaltaufgabe:

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = K e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R}$$

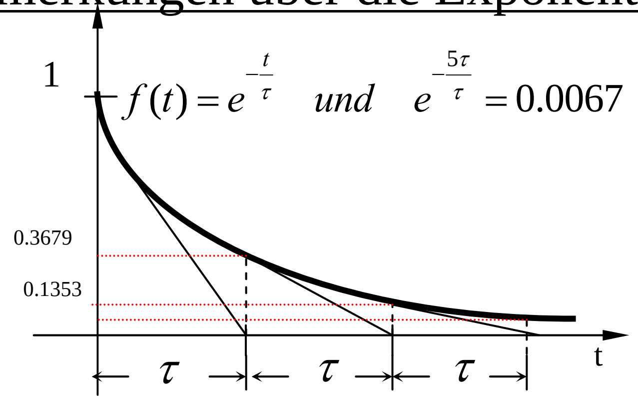
Anfangsbedingung: Der Spulenstrom $i(t=-0) = i(t=+0) = 0$ kann sich nicht sprunghaft ändern

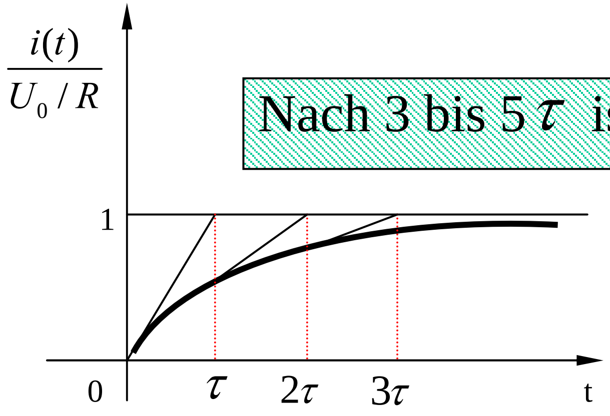
$$0 = K \underbrace{e^{-\frac{R}{L}.0}}_{1} + \frac{U_0}{R} \rightarrow \quad K = -\frac{U_0}{R}$$

Der Strom *i(t)* ergibt sich damit zu: $$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$ für $t > 0$

3.3.2 Die Methode der Differentialgleichungen

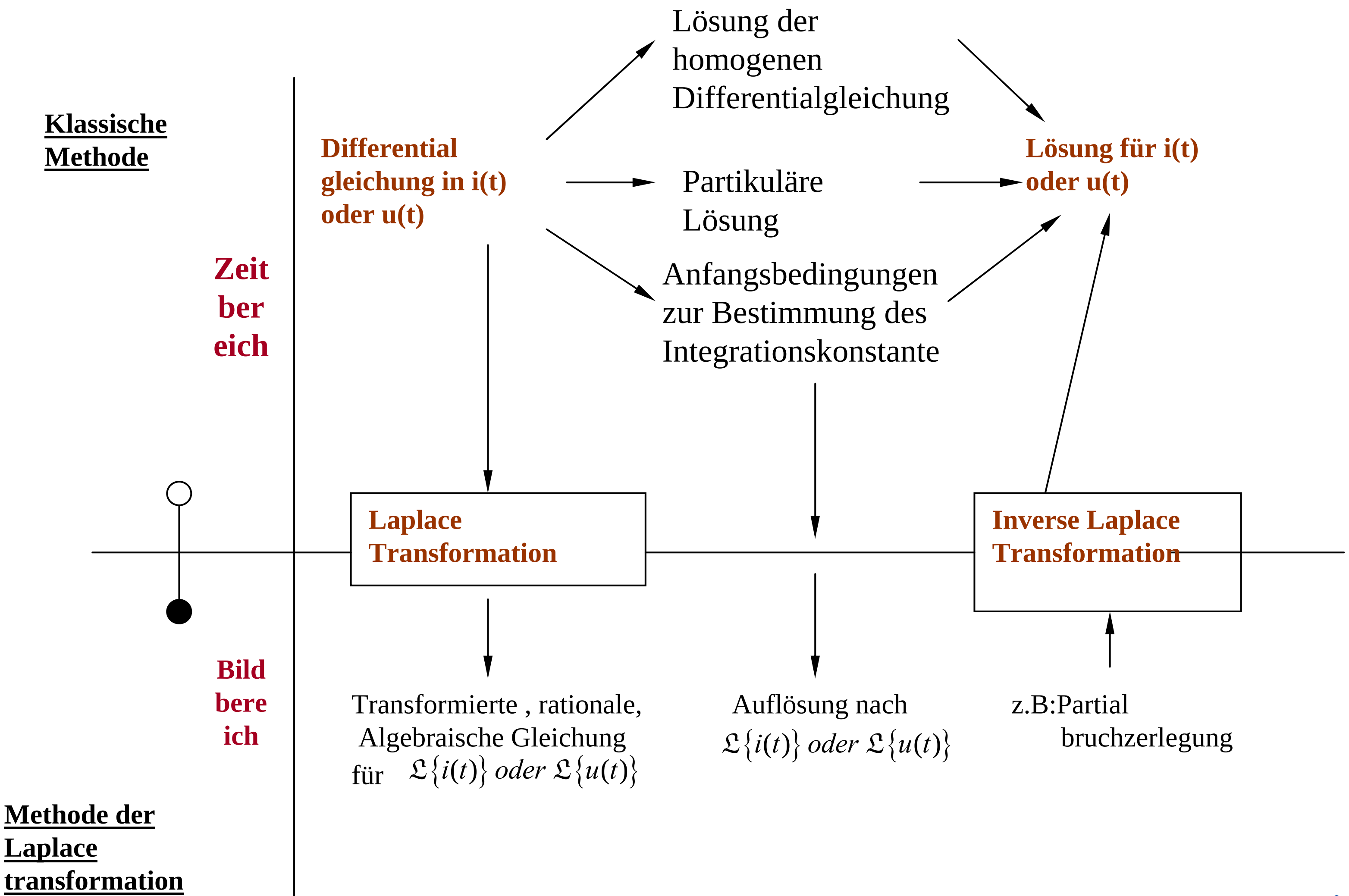
Bemerkungen über die Exponentialfunktion: $f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$





Nach 3 bis 5 τ ist der Einschaltvorgang praktisch beendet

3.3.3 Übersicht



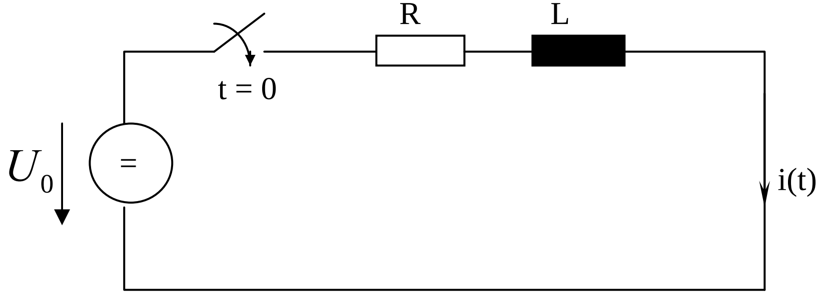
Kapitel 3.3.4

Die Methode der Laplace-Transformation

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Fachgebiet
Nachrichtentechnische Systeme
NTS

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

- Beispiel 1:



Anfangsbedingung: $i(t=-0)=0$

$$\Rightarrow \frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}i(t)=\frac{U_0}{L} \quad \text{mit} \quad \tau=\frac{L}{R}$$

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\}+\frac{1}{\tau}\mathfrak{L}\{i(t)\}=\frac{U_0}{L}\mathfrak{L}\{\varepsilon(t)\}$$

$$p\mathfrak{L}\{i(t)\}-\underbrace{i(0)}_{0}+\frac{1}{\tau}\mathfrak{L}\{i(t)\}=\frac{U_0}{L}\frac{1}{p}$$

$$\mathfrak{L}\{i(t)\}\left(p+\frac{1}{\tau}\right)=\frac{U_0}{L}\frac{1}{p}$$

$$\boxed{\mathfrak{L}\{i(t)\}=\frac{U_0}{L}\frac{1}{p(p+1/\tau)}}$$

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

Die Rücktransformation kann z.B unter Zuhilfenahme des modifizierten Heaviside'schen Satzes erfolgen:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\underline{I}(p)=\frac{\underline{Z}_1(p)}{p\underline{N}_1(p)}\right\}=i(t)=\frac{\underline{Z}_1(0)}{\underline{N}_1(0)}+\sum_{\nu=2}^{2}\frac{\underline{Z}_1(p_\nu)}{p_\nu\underline{N}_1'(p_\nu)}e^{p_\nu t}\quad \text{mit}\quad p_1=0$$

Damit gilt:

$$\underline{Z}_1(p)=\frac{U_0}{L},\quad \underline{N}_1(p)=p+\frac{1}{\tau},\quad p_2=-\frac{1}{\tau},\quad \underline{N}_1'(p)=1$$

sowie für den Strom i(t):

$$i(t)=\frac{U_0}{L}\left[\frac{1}{1/\tau}+\frac{1}{-1/\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]=\frac{U_0}{L}\tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\quad \text{mit}\quad \tau=\frac{L}{R}$$

$$\boxed{i(t)=\frac{U_0}{R}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}\qquad \text{für } t>0$$

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

Zur Rücktransformation hätte auch der Faltungssatz herangezogen werden können:

$$\underline{G}_1(p)\cdot\underline{G}_2(p)=\mathfrak{L}\{g_1(t)*g_2(t)\} \qquad g_2(t)*g_1(t)=\int_0^t g_2(x)g_1(t-x)dx=\int_0^t g_1(x)g_2(t-x)dx$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\}=1 \text{ für } t\geq 0 \quad und \quad \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1/\tau}\right\}=e^{-\frac{t}{\tau}}$$

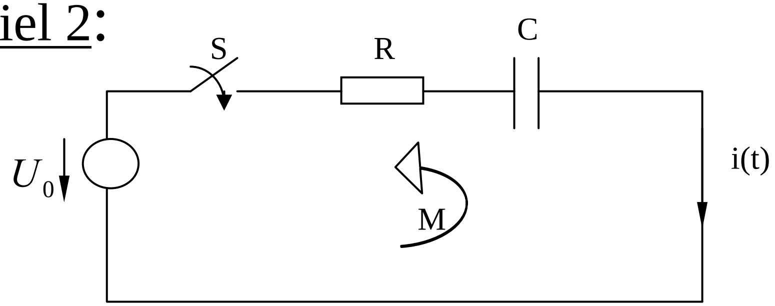
Damit folgt: $\mathfrak{L}^{-1}\{i(t)\}=\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{U_0}{L}\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{(p+1/\tau)}\right\}$

$$=\frac{U_0}{L}\int_0^t 1\cdot e^{-\frac{x}{\tau}}dx=\frac{U_0}{L}\left[\frac{e^{-\frac{x}{\tau}}}{-\frac{1}{\tau}}\right]\Bigg|_0^t=\frac{U_0}{L}(-\tau)\left(e^{-\frac{t}{\tau}}-1\right)$$

$$=\frac{U_0}{R}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

Beispiel 2:



Zur Zeit $t = 0$ befindet sich auf dem Kondensator C eine Ladung Q_0

1) Allgemeine Zusammenhänge:

$$Ri(t) + \frac{Q(t)}{C} = U_0 \quad mit \quad Q(t) = Q_0 + \int_0^t i(x)dx$$

$$i(t)R + \frac{Q_0 + \int_0^t i(x)dx}{C} = U_0$$

$$\Rightarrow \quad i(t) + \frac{1}{RC}\int_0^t i(x)dx = \frac{U_0}{R} - \frac{Q_0}{RC}$$

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

2) Lösung mit der Laplace-Transformation:

Die Differentialgleichung
wird der Laplace-Transformation zugeführt:

$$i(t) + \frac{1}{RC}\int_0^t i(x)dx = \frac{U_0}{R} - \frac{Q_0}{RC}$$

$$\mathfrak{L}\{i(t)\} + \frac{1}{RC}\underbrace{\frac{1}{p}\mathfrak{L}\{i(t)\}}_{Integralsatz} = \left(\frac{U_0}{R} - \frac{Q_0}{RC}\right)\mathfrak{L}\{\varepsilon(t)\}$$

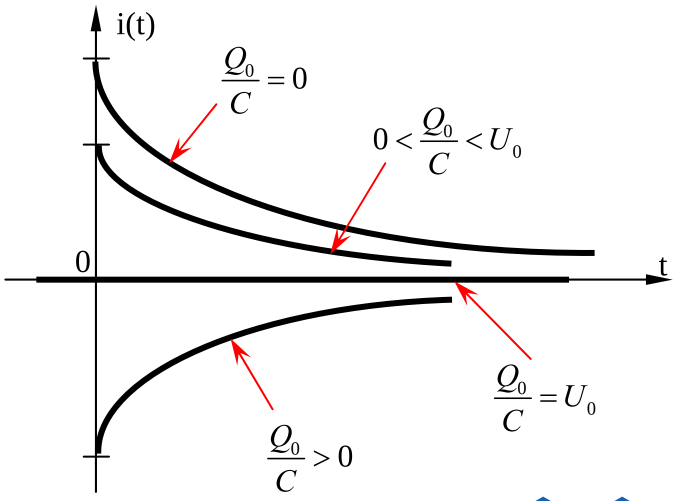
$$\mathfrak{L}\{i(t)\}\left(1 + \frac{1}{RCp}\right) = \left(\frac{U_0}{R} - \frac{Q_0}{RC}\right)\frac{1}{p}$$

$$\mathfrak{L}\{i(t)\} = \left(\frac{U_0}{R} - \frac{Q_0}{RC}\right)\frac{RCp}{1+RCp}\,\frac{1}{p} = \left(\frac{U_0}{R} - \frac{Q_0}{RC}\right)\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{RC} + p}}_{Dämpfungssatz}$$

$$\boxed{i(t) = \left(\frac{U_0}{R} - \frac{Q_0}{RC}\right)e^{-t/RC}}$$

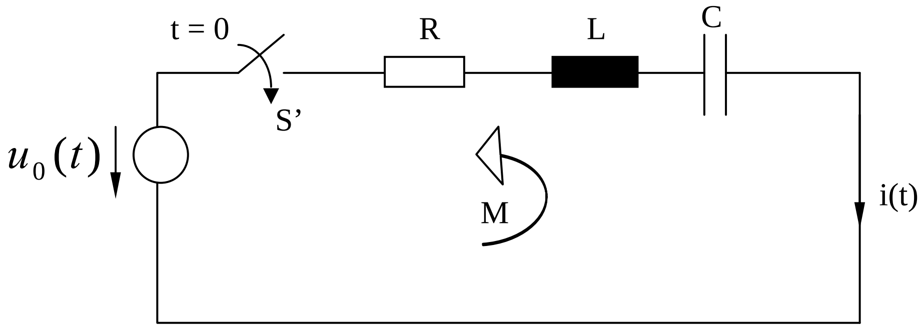
für t >0 mit $\tau = RC$

Graphische Darstellung der Ergebnisse:



3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

Beispiel 3 : In diesem Beispiel soll ein Reihenschwingkreis zur Zeit t = 0 über einen idealen Schalter S verbunden werden mit:



a) Wechselspannung: $u_0(t) = \hat{u}_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$

b) Gleichspannung : U_0

c) Mischspannung: $u_0(t) = U_0 + \hat{u}_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$

Gesucht ist *i(t)* für *t > 0*

Die Maschengleichung lautet :

$$R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u_C(t) = u_0(t)$$

bzw. mit $i(t) = C\dfrac{du_C(t)}{dt}$ gilt:

$$RC\frac{du_C(t)}{dt} + LC\frac{d^2u_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_0(t)$$

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

Damit ergibt sich:

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt} + \frac{R}{L}\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u_C(t) = \frac{1}{LC}u_0(t)$$

Es werden folgende Kenngrößen des Schwingkreises eingeführt:

- Resonanzkreisfrequenz: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Güte: $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{Z_k}{R}$
- Kennwiderstand des Schwingkreises: $Z_k = \sqrt{\frac{L}{C}}$
- Dämpfung des Schwingkreises: $2D = \frac{1}{Q}$ mit $\frac{R}{L} = \frac{R\sqrt{\frac{C}{L}}}{\sqrt{LC}} = 2\omega_0 D$

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

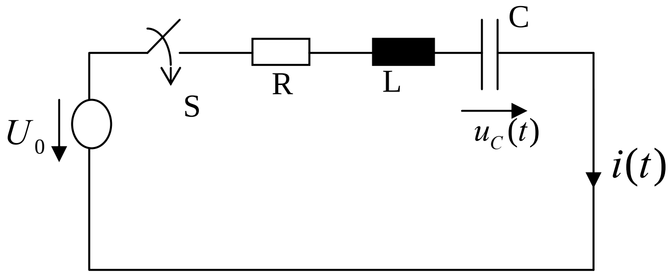
Somit hat die homogene Differentialgleichung die Form :

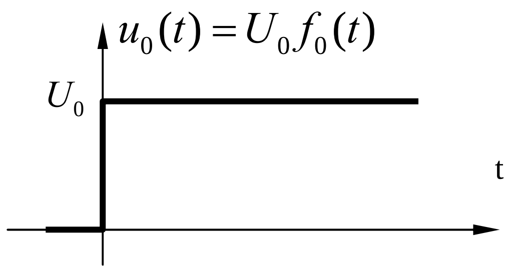
$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + 2\omega_0 D \frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0{}^2 u_C(t) = 0$$

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

- Fall3 : Periodischer Fall (D < 1)

3.1 Anregung mit Sprungfunktion





3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation:

Die inhomogene Differentialgleichung wird der Laplace-Transformation zugeführt (Hier Fall b - Einschalten der Gleichspannung):

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + 2\omega_0 D\frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0{}^2 u_C(t) = \omega_0{}^2 U_0 \qquad \text{für } t > 0$$

(Differentiationssatz für die Originalfunktion)

$$p^2\mathfrak{L}\{u_C(t)\} - pu_C(0) - u_C^{'}(0) + 2\omega_0 D\left[p\mathfrak{L}\{u_C(t)\} - u_C(0)\right] + \omega_0{}^2\mathfrak{L}\{u_C(t)\} = \frac{\omega_0{}^2 U_0}{p}$$

Mit den Anfangsbedingungen $u_C(0) = 0 \quad und \quad u_C^{'}(0) = 0$

folgt hieraus :

$$p^2\mathfrak{L}\{u_C(t)\} + 2\omega_0 D p\mathfrak{L}\{u_C(t)\} + \omega_0\mathfrak{L}\{u_C(t)\} = \frac{\omega_0^2 U_0}{p}$$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Fachgebiet Nachrichtentechnische Systeme

NTS

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

Somit gilt für die Bildfunktion von $u_C(t)$

$$\boxed{\mathfrak{L}\{u_C(t)\} = \frac{\omega_0^2 U_0}{p(p^2 + 2\omega_0 D p + \omega_0{}^2)}}$$

Die Originalfunktion kann unter Verwendung des modifizierten Satzes von Heaviside vorgenommen werden, wobei wieder der periodische Fall $D < 1$ betrachtet werden soll. Es gilt:

$$\mathfrak{L}\{u_C(t)\} = \frac{\underline{Z}_1(p)}{p\underline{N}_1(p)} \quad \text{mit} \quad \underline{Z}_1(p) = \omega_0{}^2 U_0 \quad , \quad \underline{N}_1(p) = p^2 + 2\omega_0 D p + \omega_0{}^2$$

$$\frac{d\underline{N}_1(p)}{dp} = 2p + 2\omega_0 D \quad , \quad p_1 = 0,\ p_2 = \omega_0(-D + j\sqrt{1 - D^2})$$

Damit ergibt sich die Originalfunktion $u_C(t)$ zu :

$$p_3 = \omega_0(-D - j\sqrt{1 - D^2})$$

$$u_C(t) = \frac{\underline{Z}_1(0)}{\underline{N}_1(0)} + \sum_{v=2}^{3} \frac{\underline{Z}_1(p)}{p_v \underline{N}_1^{'}(p)} \cdot e^{p_v t} = \frac{\omega_0{}^2 U_0}{\omega_0{}^2} + \frac{\omega_0{}^2 U_0}{p_2 2(p_2 + \omega_0 D)} e^{p_2 .t} + \frac{\omega_0{}^2 U_0}{p_3 2(p_3 + \omega_0 D)} e^{p_3 .t}$$

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

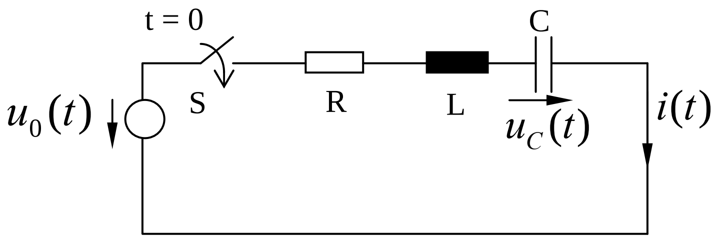
Fachgebiet
Nachrichtentechnische Systeme

NTS

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

3.2 Anregung mit Wechselspannung (Fall a):

Es soll weiterhin nur der periodische Fall (konjugiert-komplexe Pole bzw. D < 1) betrachtet werden. Hier für gilt die inhomogene Differentialgleichung:



$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + 2\omega_0 D \frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0{}^2 u_C(t) = \omega_0{}^2 u_0(t)$$

für $t > 0$, mit $u_0(t) = \hat{u}_0 \cos(\omega t + \varphi_u)$

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

Lösung mittels der Laplace-Transformation:

Betrachtet wird die Differentialgleichung für $u_C(t)$

$$\boxed{\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + 2\omega_0 D \frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0{}^2 u_C(t) = \omega_0{}^2 u_0(t)}$$

Nach der Transformation dieser Gleichung in dem Bildbereich ergibt sich unter Berücksichtigung des „Differentiationssatzes für die Originalfunktion " der Zusammenhang :

$$p^2\mathfrak{L}\{u_C(t)\} - pu_C(0) - u_C{}'(0) + 2\omega_0 D\left[p\mathfrak{L}\{u_C(t)\} - u_C(0)\right] + \omega_0{}^2\mathfrak{L}\{u_C(t)\} = \omega_0{}^2\mathfrak{L}\{u_0(t)\}$$

Mit den Anfangsbedingungen: $u_C(0) = 0 \; und \; u_C{}'(0) = 0$

folgt hieraus :

$$\underline{p}^2\mathfrak{L}\{u_C(t)\} + 2\omega_0 D\left[\underline{p}\mathfrak{L}\{u_C(t)\}\right] + \omega_0{}^2\mathfrak{L}\{u_C(t)\} = \omega_0{}^2\mathfrak{L}\{u_0(t)\}$$

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

Somit gilt für die Bildfunktion von u_C :

$$\mathfrak{L}\left\{u_C(t)\right\} = \frac{\omega_0{}^2 \mathfrak{L}\left\{u_0(t)\right\}}{p^2 + 2\omega_0 D p + \omega_0{}^2}$$

Wird noch:

$$\mathfrak{L}\left\{u_0(t)\right\} = \mathfrak{L}\left\{\hat{u}_0 \cos(\omega t + \varphi_u)\right\} = \hat{u}_0 \frac{p \cos\varphi_u - \omega \sin\varphi_u}{p^2 + \omega^2}$$

in die obige Gleichung eingesetzt erhält man:

$$\boxed{\mathfrak{L}\left\{u_C(t)\right\} = \hat{u}_0 \omega_0{}^2 \frac{\underline{p} \cos\varphi_u - \omega \sin\varphi_u}{\left(p^2 + \omega^2\right)\left(p^2 + 2\omega_0 D p + \omega_0{}^2\right)}}$$

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

Diese Bildfunktion muss dann in den Originalbereich zurücktransformiert werden z.B unter Zuhilfenahme der Methode der Partialbruchzerlegung. Es gilt :

$$\mathfrak{L}\left\{u_C(t)\right\} = \frac{\underline{Z}(p)}{\underline{N}(p)}$$

mit $\underline{Z}(p) = \hat{u}_0\omega_0\left(p\cos\varphi_u - \omega\sin\varphi_u\right)$

und $\underline{N}(p) = \left(p^2+\omega^2\right)\left(p^2+2\omega_0 Dp+\omega_0{}^2\right)$

In periodischen Fall (D < 1) gilt:

$$p_1 = j\omega\ ,\ p_2 = -j\omega$$

$$\underline{p}_{3,4} = \sigma \pm j\omega_1 = \omega_0(-D \pm j\sqrt{1-D^2})$$

Für die erste Ableitung des Nenners nach der Variablen p gilt:

$$\frac{d\underline{N}(p)}{dp} = 4p^3 + 6\omega_0 Dp^2 + 2(\omega_0{}^2+\omega^2)p + 2\omega_0 D\omega^2$$

3.3.4 Die Methode der Laplace-Transformation

Damit läßt sich die Originalfunktion angeben über:

$$u_C(t)=\hat{u}_0\omega_0^2\left\{\frac{j\omega\cos\varphi_u-\omega\sin\varphi_u}{4(j\omega)^3+6\omega_0D(j\omega)^2+2(\omega_0^2+\omega^2)j\omega}e^{j\omega t}+\frac{-j\omega\cos\varphi_u-\omega\sin\varphi_u}{4(-j\omega)^3+6\omega_0D(-j\omega)^2+2(\omega_0^2+\omega^2)(-j\omega)}e^{-j\omega t}\right.$$

$$\left.+\frac{p_3\cos\varphi_u-\omega\sin\varphi_u}{4p_1^3+6\omega_0Dp_3^2+2(\omega_0^2+\omega^2)p_3+2\omega_0D\omega^2}e^{p_3t}+\frac{p_4\cos\varphi_u-\omega\sin\varphi_u}{4p_4^3+6\omega_0Dp_4^2+2(\omega_0^2+\omega^2)p_4+2\omega_0D\omega^2}e^{p_4t}\right\}$$

Problem:

Weitere Vereinfachung zu reellen Termen ist aufwendig!