Grundlagen der Elektrotechnik 3

Kapitel 4

Ortskurven

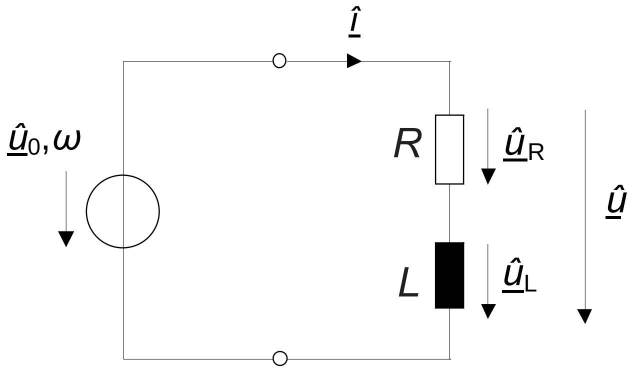
UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Fachgebiet
Nachrichtentechnische Systeme

4 Ortskurven

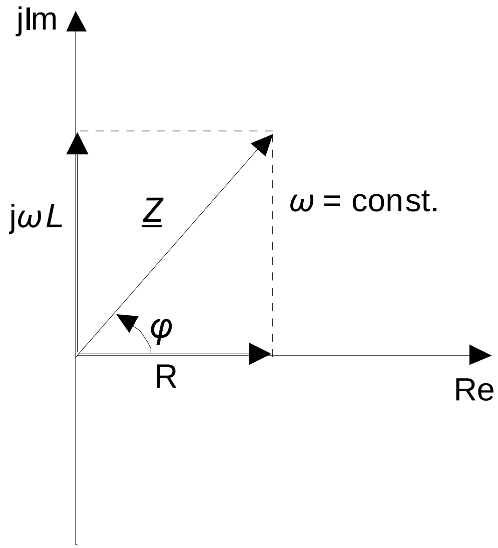
– Eine Ortskurve ist die Kurve, welche alle Endpunkte von Zeigern verbindet

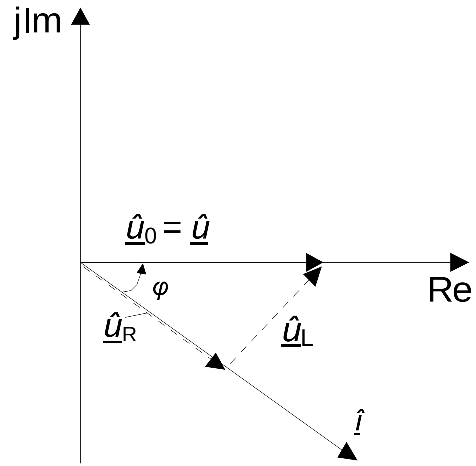
– Eine Ortskurve kann Verlauf in Abhängigkeit von der Frequenz oder einem anderem Parameter zeigen

4 Ortskurven



Beispiel: Ein passives Netzwerk





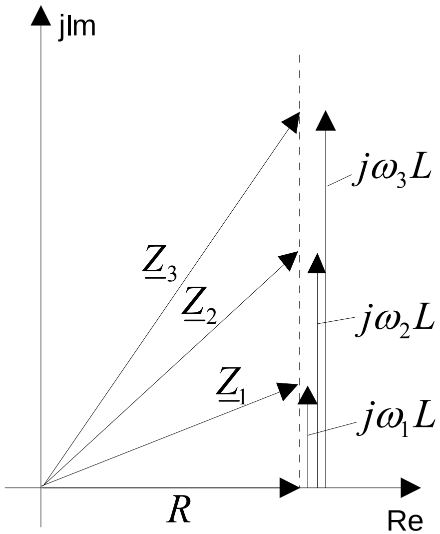
Zugehörige Zeigerdiagramme

Hier gilt wie üblich:

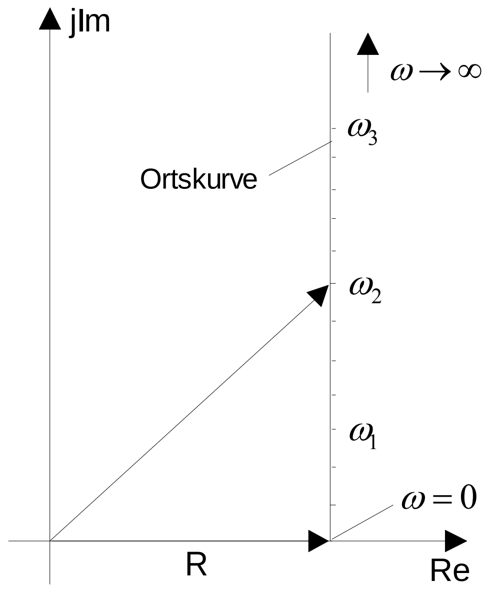
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

4 Ortskurven

In manchen Fällen ist die Impedanz für verschiedene Frequenzen von Interesse.



$$\underline{Z}_1 = R + j\omega_1 L$$
$$\underline{Z}_2 = R + j\omega_2 L$$
$$\underline{Z}_3 = R + j\omega_3 L$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$



Impedanz für verschiedene Frequenzen

Hieraus entsteht eine Ortskurve

4 Ortskurven

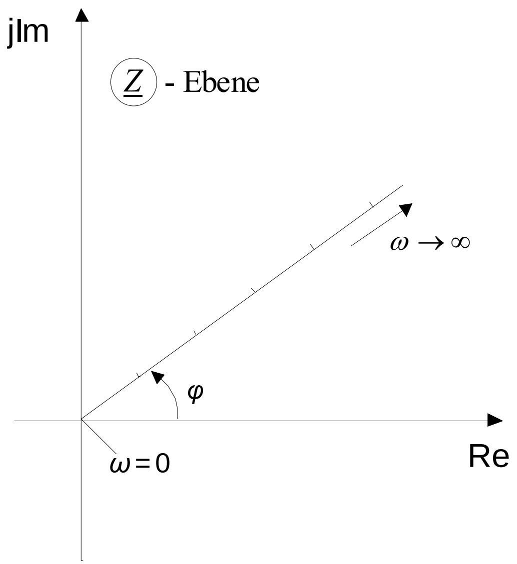
Jetzt wird Impedanz mit Admittanz auf Basis bekannter Zusammenhänge verglichen.

Die Transformation führt eine „Spiegelung am Einheitskreis“ durch. Eine Gerade durch den Nullpunkt ergibt wieder eine Gerade durch den Nullpunkt.

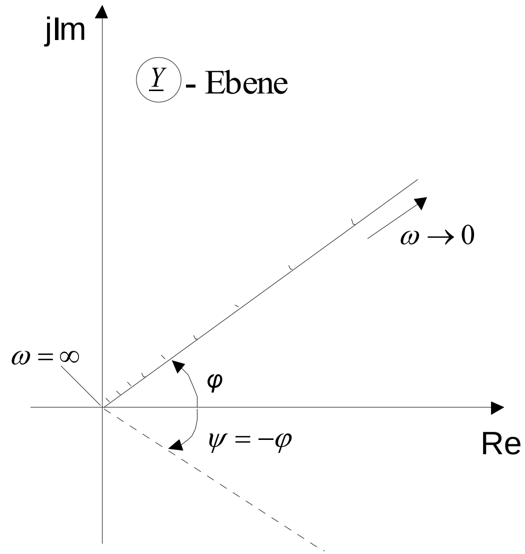
$$\underline{Z} = |\underline{Z}| e^{j\varphi} \qquad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \qquad \underline{Z}\underline{Y} = 1$$

$$\underline{Y} = |\underline{Y}| e^{j\psi}$$

$$\varphi = -\psi \qquad |\underline{Y}| = \frac{1}{|\underline{Z}|}$$



Ortskurve der Impedanz

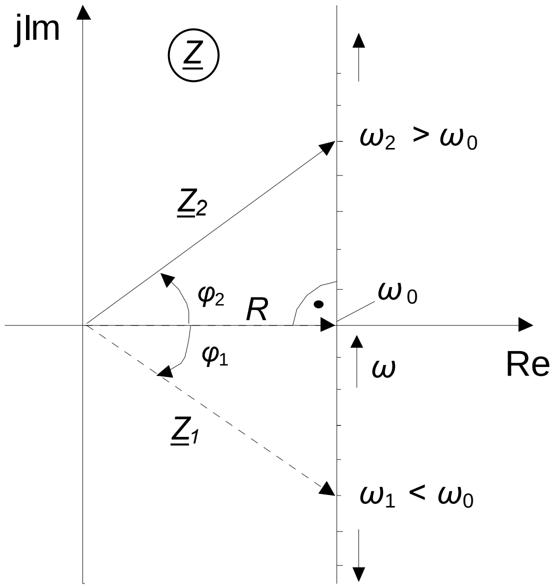


Konstruktion der Ortskurve der Admittanz

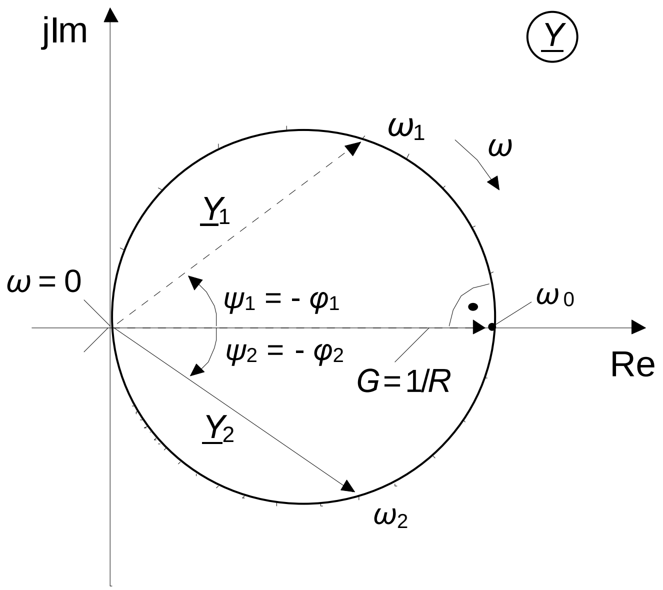
4 Ortskurven

Jede Gerade nicht durch den Nullpunkt wird in einen Kreis durch den Nullpunkt transformiert.

Geraden sind immer parallel zur imaginären Achse und haben positiven Realteil.



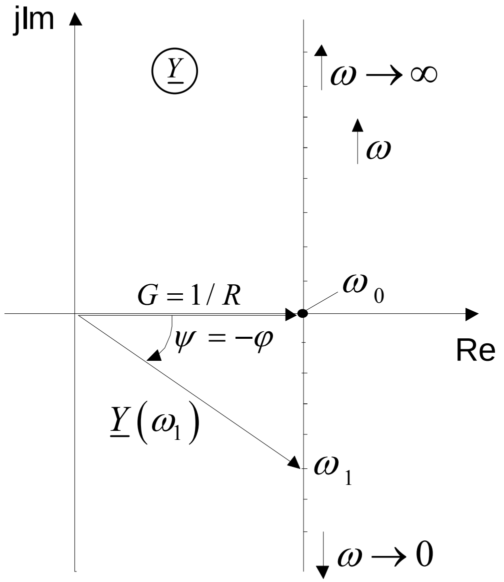
Ortskurve der Impedanz



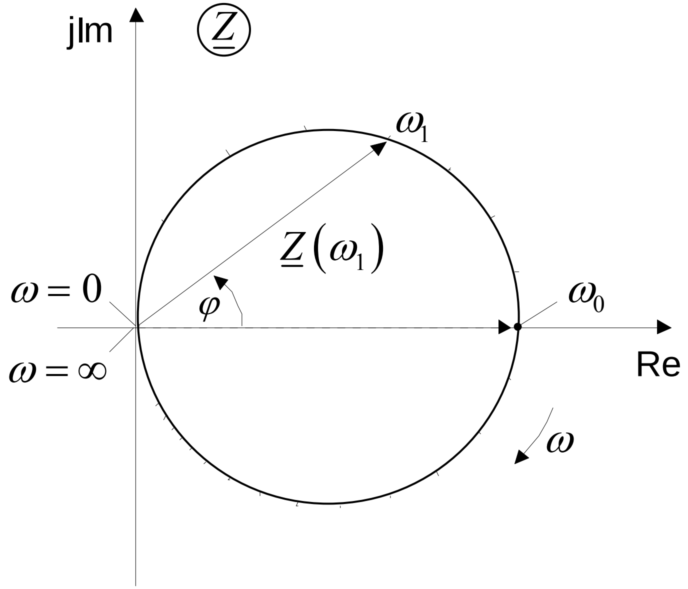
Ortskurve der zugehörigen Admittanz und Durchmesser-Konstruktion

4 Ortskurven

Transformation ist immer “winkeltreu im Kleinen”
Rechte Winkel bleiben erhalten , z.B. Kurve bei G = 1/R
Bei passiven Netzwerken verlaufen die Geraden immer parallel zur imaginären Achse (Nur pos. Realteile möglich).



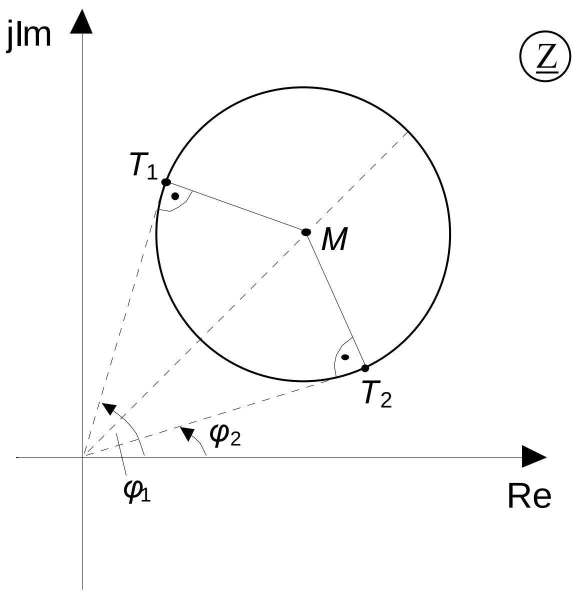
Ortskurve der Admittanz
für Parallelschaltung R/L/C



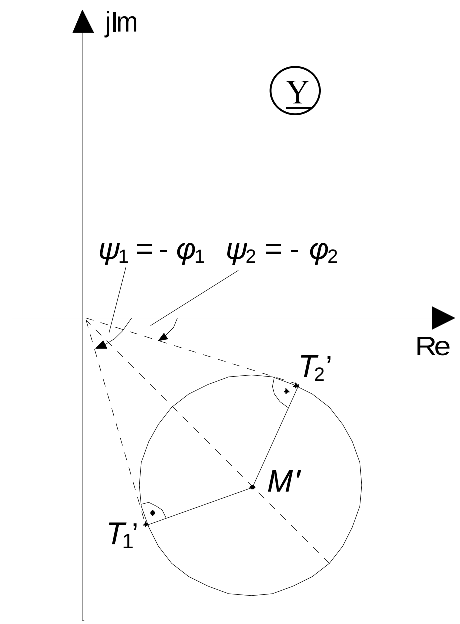
Ortskurve für zugehörige Impedanz

4 Ortskurven

Kreise durch den Nullpunkt werden in Geraden parallel zur imaginären Achse transformiert, die positiven Realteil besitzen.
Kreise ohne Nullpunktberührung werden transformiert in Kreise ohne Nullpunktberührung.



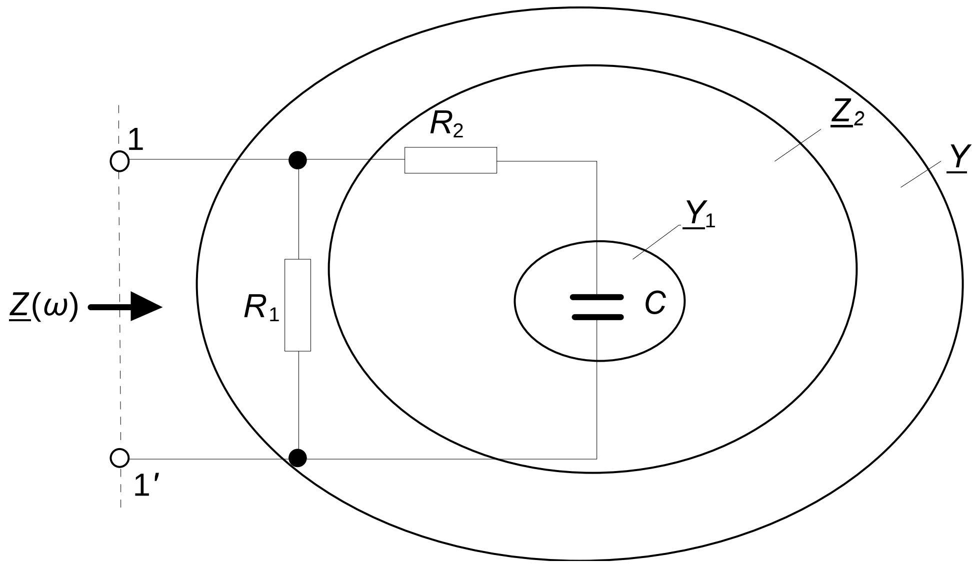
Ortskurve der Impedanz



Ortskurve zugehöriger Admittanz

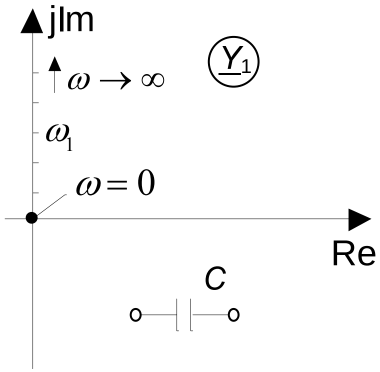
4 Ortskurven

Ein Beispiel:

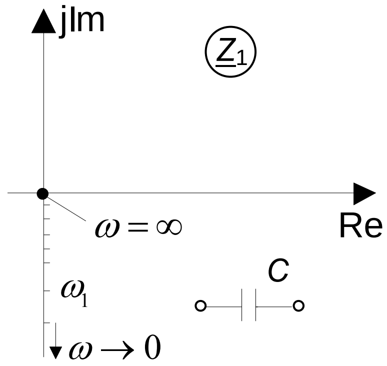


Ein passives Netzwerk

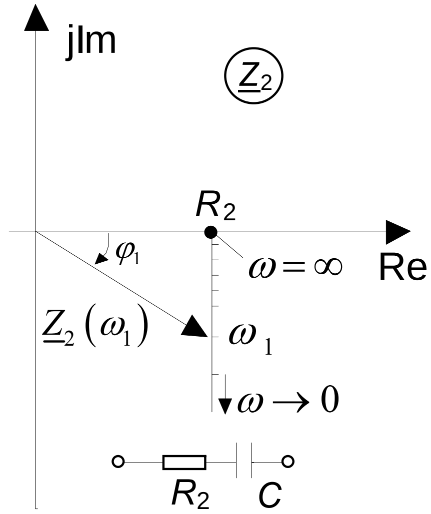
4 Ortskurven



Ortskurve der Admittanz zu C

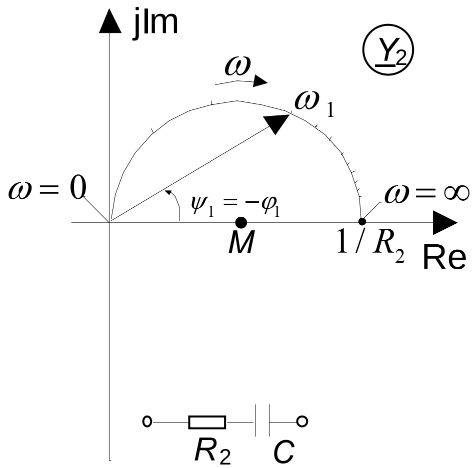


Zugehörige Ortskurve der Impedanz zu C

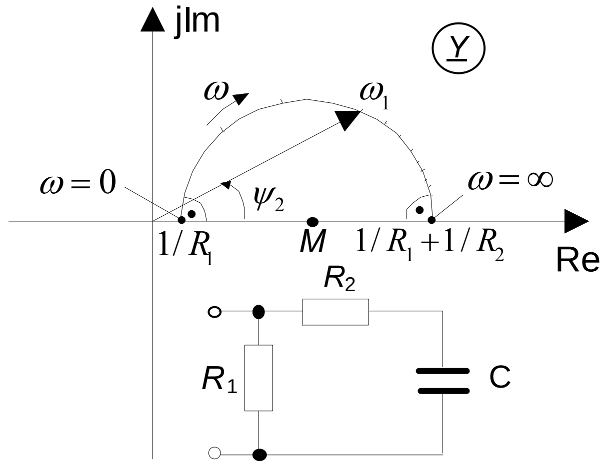


Impedanz der Reihenschaltung

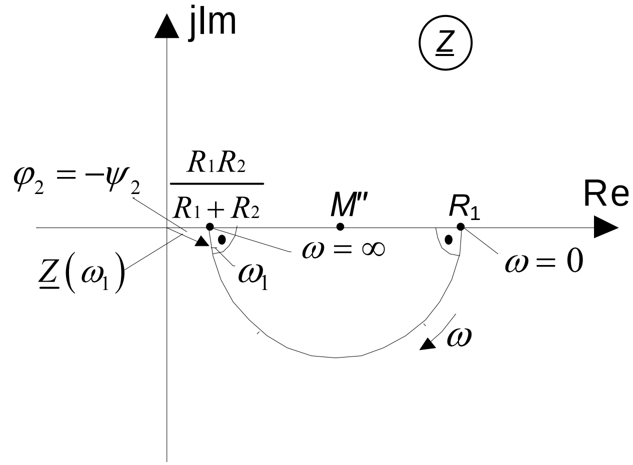
4 Ortskurven



Ortskurve der Admittanz der Reihenschaltung



Admittanz des gesamten Netzwerks



Ortskurve der zugehörigen Impedanz

4 Ortskurven

Nachteile:

- Keine bzw. aufwändige Parametrisierung
- Z.T. aufwändige Konstruktion der Geometrie

Rechnung mit $R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 2\ \Omega \quad C = 0{,}1F$:

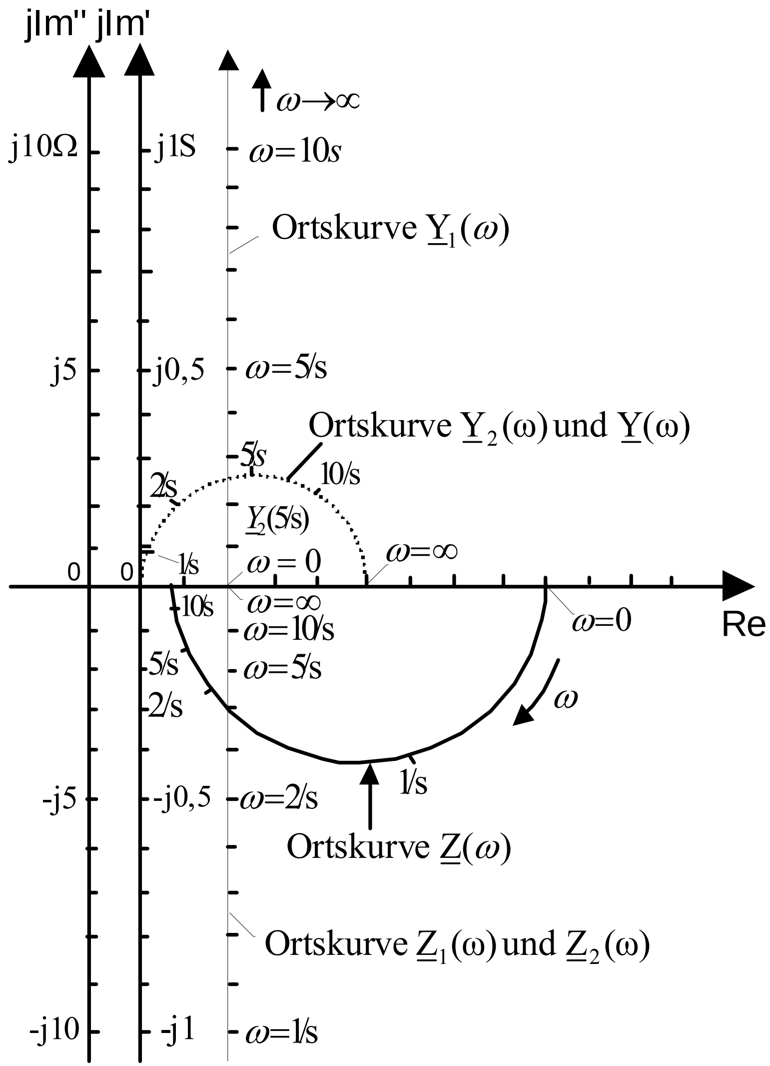
Zeichnung mit z.B. 1 cm = 0,1 S für Y und 1 Ω = 1 cm für Z

4 Ortskurven

Skalierung der Ortskurve führt zu folgendem Bild:

Raster ist jeweils im Abstand 1 cm angebracht

Zur Vereinfachung der Zeichenarbeit werden imaginäre Achsen inkl. Nullpunkt passend verschoben (anstelle Verschiebung der Geraden)



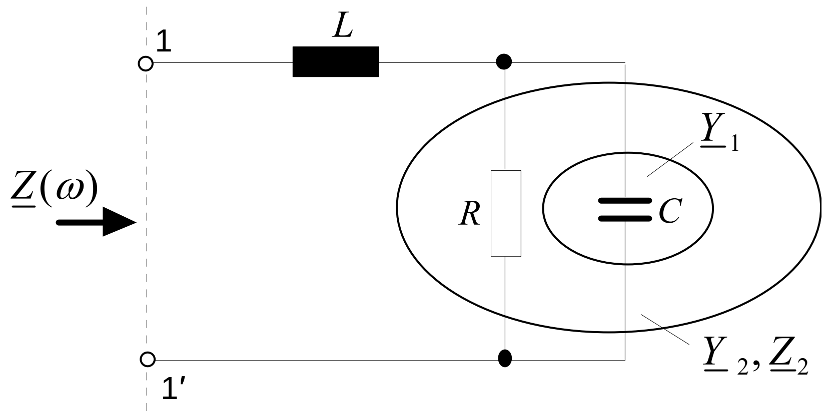
UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Fachgebiet Nachrichtentechnische Systeme

NTS

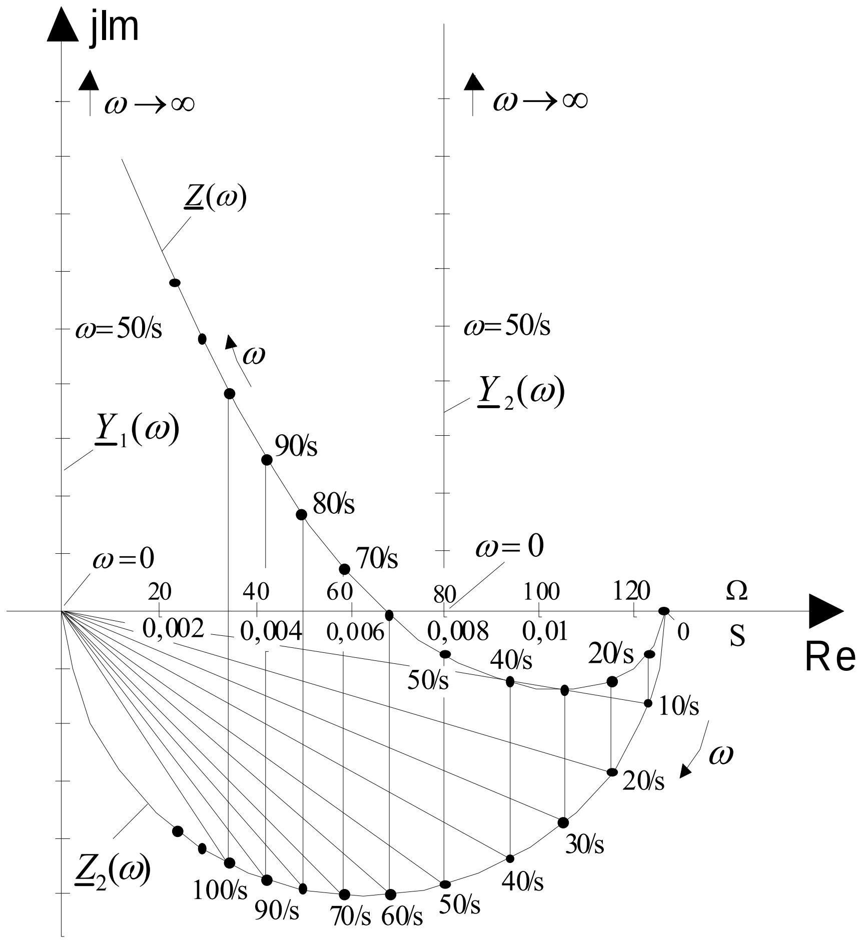
4 Ortskurven

Ein weiteres Beispiel mit R =125 Ω , C = 100 µF und L = 0,85 H:



Skalierung: 10 Ω = 1 Teilstrich für Z

1mS = 1 Teilstrich für Y



Zugehörige Ortskurve

Grundlagen der Elektrotechnik 3

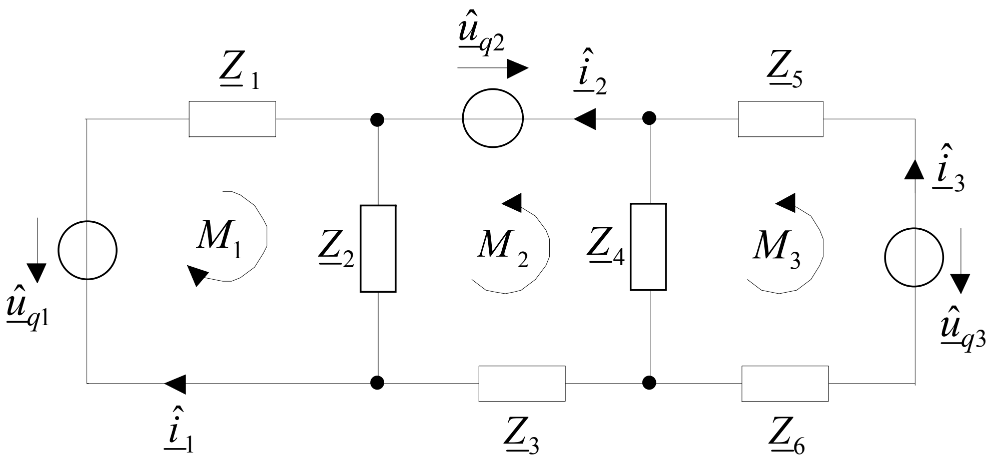
Kapitel 5

Netzwerksätze

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN
Fachgebiet
Nachrichtentechnische Systeme
NTS

5.1 Der Überlagerungssatz

Der Überlagerungssatz ist für alle linearen Netzwerke gültig.
Es wird ein beliebiges Netzwerk betrachtet, siehe folgendes Beispiel.
Das Beispielnetzwerk enthält 3 unabhängige Spannungsquellen.



Dafür gelten die folgenden Maschengleichungen:

$$
\begin{array}{llllll}
M_1: & (\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)\underline{\hat{i}}_1 & +\underline{Z}_2\underline{\hat{i}}_2 & & = \underline{\hat{u}}_{q1} \\
M_2: & \underline{Z}_2\underline{\hat{i}}_1 & +(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3+\underline{Z}_4)\underline{\hat{i}}_2 & -\underline{Z}_4\underline{\hat{i}}_3 & = \underline{\hat{u}}_{q2} \\
M_3: & & -\underline{Z}_4\underline{\hat{i}}_2 & +(\underline{Z}_4+\underline{Z}_5+\underline{Z}_6)\underline{\hat{i}}_3 & = \underline{\hat{u}}_{q3}
\end{array}
$$

5.1 Der Überlagerungssatz

In Matrizenschreibweise ergibt sich:

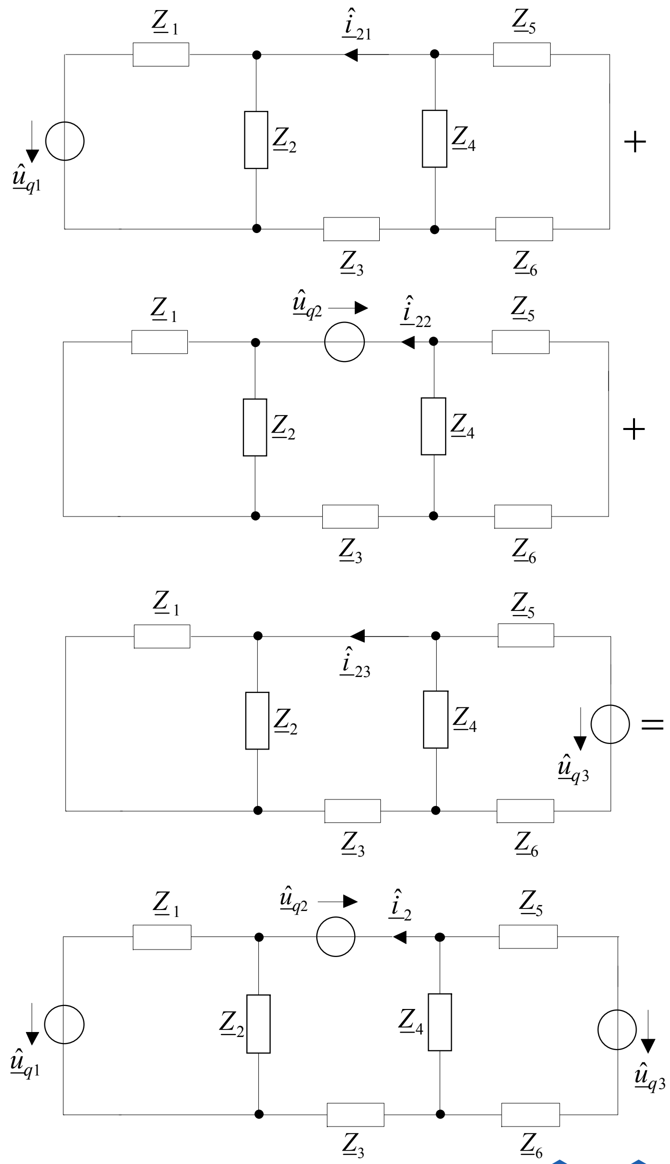
$$\underline{\overleftrightarrow{Z}}_{\mathrm{m}} \underline{\vec{\hat{i}}}_{\mathrm{m}} = \underline{\vec{\hat{u}}}_{\mathrm{qm}} \quad \text{mit} \quad \underline{\vec{\hat{u}}}_{\mathrm{qm}} = \begin{pmatrix} \underline{\hat{u}}_{\mathrm{q1}} \\ \underline{\hat{u}}_{\mathrm{q2}} \\ \underline{\hat{u}}_{\mathrm{q3}} \end{pmatrix}$$

Nach der Cramerschen Regel erhält man u.a.:

$$\underline{\hat{i}}_2 = \frac{-\underline{Z}_2(\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6)}{\det \underline{\overleftrightarrow{Z}}_{\mathrm{m}}} \underline{\hat{u}}_{\mathrm{q1}} + \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6)}{\det \underline{\overleftrightarrow{Z}}_{\mathrm{m}}} \underline{\hat{u}}_{\mathrm{q2}} + \frac{\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\det \underline{\overleftrightarrow{Z}}_{\mathrm{m}}} \underline{\hat{u}}_{\mathrm{q3}}$$

Dies lässt sich so interpretieren:
Dieser Strom ist verursacht durch die Überlagerung der Wirkung aller 3 Spannungsquellen.

5.1 Der Überlagerungssatz



Der Gesamtstrom setzt sich zusammen aus der Überlagerung von Strömen, die jeweils aus immer nur einer der 3 Spannungsquellen verursacht werden.

$$\hat{\underline{i}}_2 = \hat{\underline{i}}_{21} + \hat{\underline{i}}_{22} + \hat{\underline{i}}_{23}$$

Für das Überlagerungsprinzip gilt die Regel:
Sind in einem Netzwerk q Strom- oder Spannungsquellen enthalten, können alle Ströme und alle Spannungen im Netzwerk durch Überlagerung der einzelnen Quellen berechnet werden.

5.1 Der Überlagerungssatz

Hinweis 1:
Der Satz gilt nicht nur für sinusförmige Quellen mit einer festen Frequenz sondern auch für Quellen mit anderen Zeitabhängigkeiten. In einem derartigen Fall ist nur die Berechnung mit komplexen Zeigern nicht möglich.

Hinweis 2:
Sind in einer Masche mehrere Spannungsquellen enthalten, ist es sinnvoll diese erst zu addieren und dann den Überlagerungssatz anzuwenden.

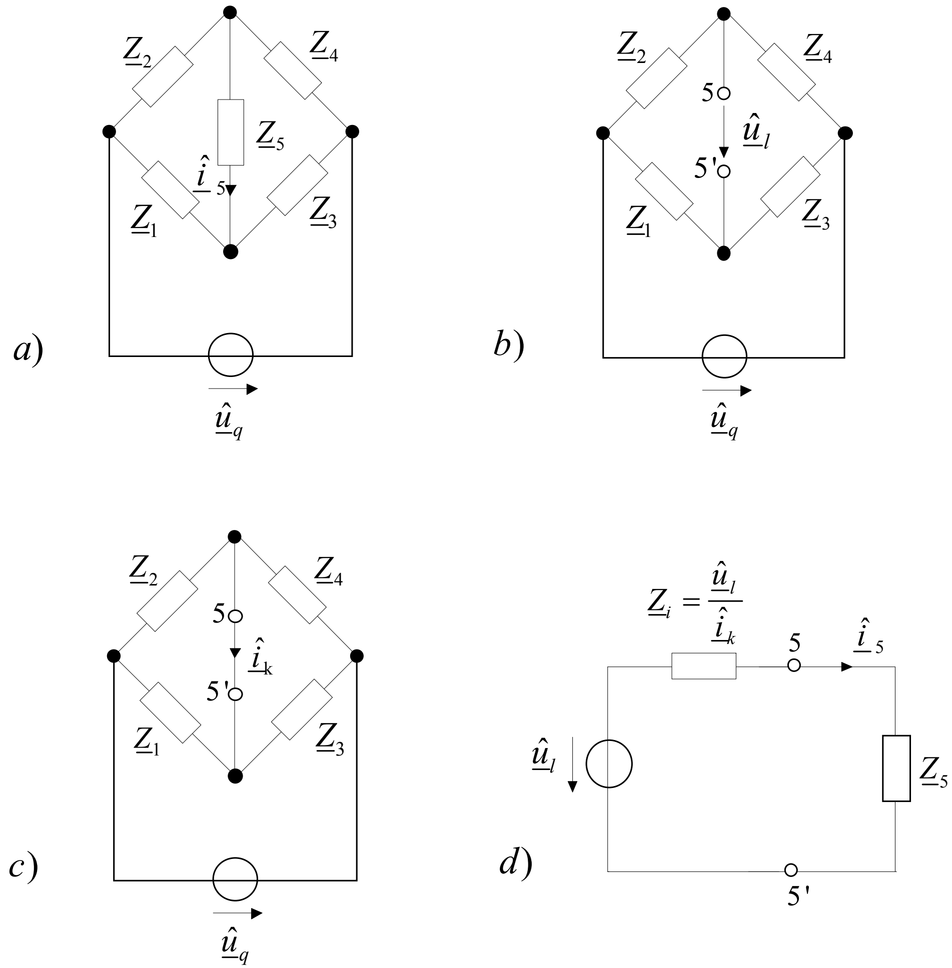
Die Überlagerung ist bei gegebener Linearität von Netzwerken auch die Grundlage zur Bestimmung von Strömen im Netzwerk auf Basis der unabhängigen Maschenströme.

5.2 Der Satz zur Ersatzspannungsquelle

Bei Netzwerken mit vielen Bauteilen, an die eine Last angeschaltet wird, ist es von Interesse, die Wirkung des gesamten Netzwerkes in Bezug auf die Last auf einfache Weise zu ermitteln.

Das nebenstehende Beispiel zeigt das Vorgehen:

a) Betrieb des Netzwerks mit Last
b) Bestimmung der Leerlaufspannung
   (ohne Last)
c) Bestimmung des Kurzschluss-Stroms
d) Resultierendes Ersatzschaltbild

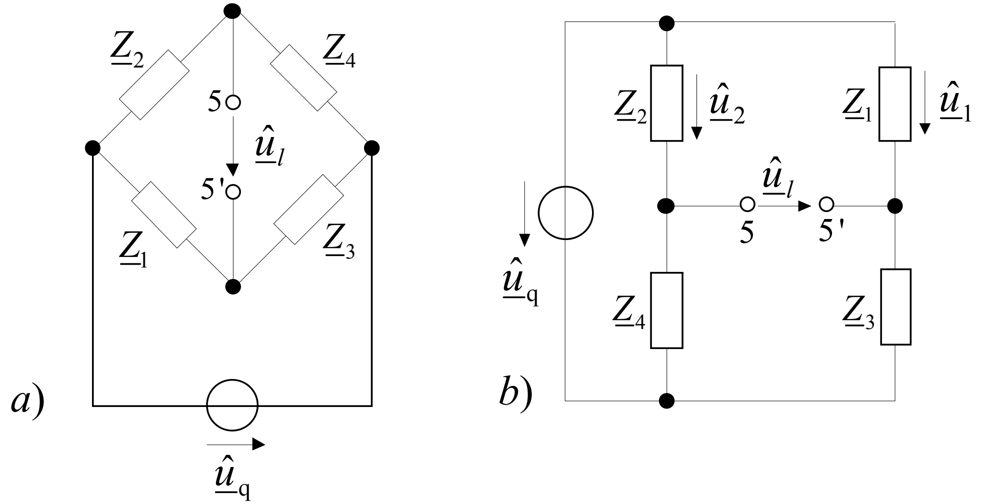


5.2 Der Satz zur Ersatzspannungsquelle

Die Berechnung zu b) (Leerlaufspannung) des Beispiels erfolgt mittels:

$$\underline{\hat{u}}_l = \underline{\hat{u}}_1 - \underline{\hat{u}}_2$$

$$= \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}\underline{\hat{u}}_q - \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4}\underline{\hat{u}}_q$$

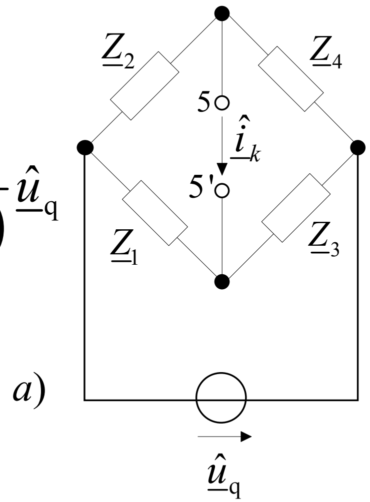


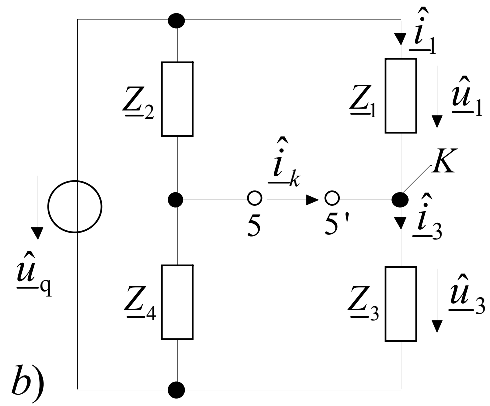
5.2 Der Satz zur Ersatzspannungsquelle

Die Berechnung zu c) (Kurzschlussstrom) des Beispiels erfolgt über:

$$\hat{\underline{i}}_{\mathrm{k}} = \hat{\underline{i}}_3 - \hat{\underline{i}}_1$$

$$= \frac{\underline{Z}_4\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\left(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4\right) + \underline{Z}_3\underline{Z}_4\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right)}\hat{\underline{u}}_{\mathrm{q}}$$





Die Zwischenschritte dazu sind wie folgt:

5.2 Der Satz zur Ersatzspannungsquelle

Es werden zunächst die Spannungen (über die Spannungsteilerregel) und daraus die Ströme bestimmt:

$$\underline{\hat{u}}_1 = \frac{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}}{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}+\dfrac{\underline{Z}_3\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4}}\underline{\hat{u}}_\mathrm{q} \qquad \underline{\hat{u}}_3 = \frac{\dfrac{\underline{Z}_3\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4}}{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}+\dfrac{\underline{Z}_3\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4}}\underline{\hat{u}}_\mathrm{q}$$

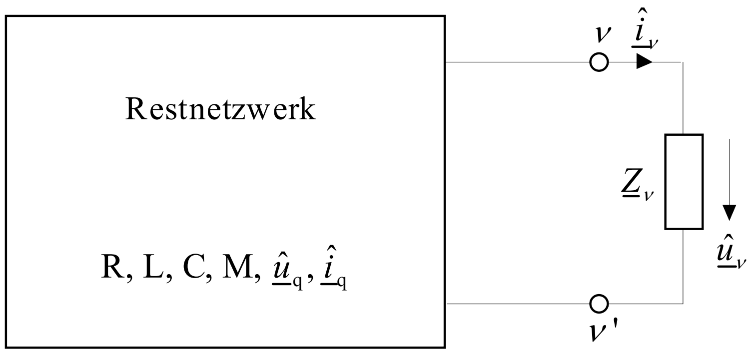
$$\underline{\hat{i}}_1 = \frac{\underline{u}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}}{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}+\dfrac{\underline{Z}_3\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4}}\underline{\hat{u}}_\mathrm{q} \qquad \underline{\hat{i}}_3 = \frac{\underline{u}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{\dfrac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4}}{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}+\dfrac{\underline{Z}_3\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4}}\underline{\hat{u}}_\mathrm{q}$$

5.2 Der Satz zur Ersatzspannungsquelle

<u>Satz:</u>
In einem Netzwerk aus passiven Komponenten (mit R,C,L,M Bauteilen) sowie mit ungesteuerten Quellen können Strom und Spannung an einer Last so bestimmt werden, dass das Netzwerk durch eine Ersatzspannungsquelle ersetzt wird.

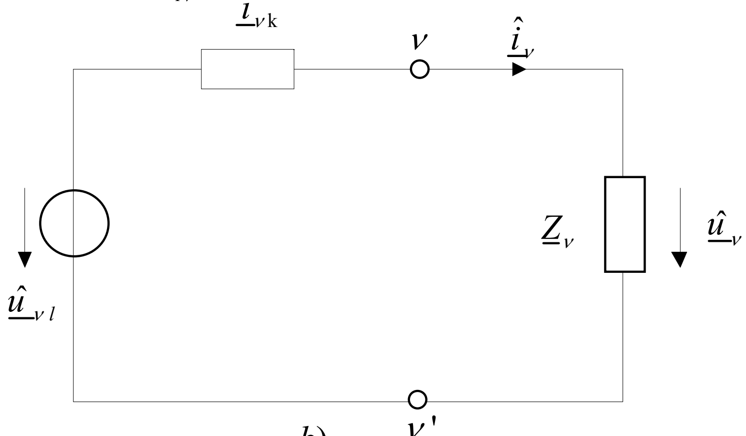
Die Leerlaufspannung der Ersatzspannungsquelle ist dabei identisch mit der Leerlaufspannung ohne Last.

Die Innenimpedanz der Ersatzspannungsquelle bestimmt sich aus der Leerlaufspannung und dem Kurzschlussstrom. Dieser Kurzschlussstrom ist zu bestimmen durch einen Kurzschluss des Netzwerks (anstelle der Last).



a)

$$\underline{Z}_{i\nu} = \frac{\underline{\hat{u}}_{\nu l}}{\underline{\hat{i}}_{\nu k}}$$



b)

5.2 Der Satz zur Ersatzspannungsquelle

Alternative zur Bestimmung der Innenimpedanz:
- Ersatz aller Stromquellen durch Leerläufe
- Ersatz aller Spannungsquellen durch Kurzschlüsse
- Bestimmung der Ausgangsimpedanz des Restnetzwerks durch Netzwerkanalyse

5.3 Der Satz zur Ersatzstromquelle

Vergleichbar zur Anwendung von Ersatzspannungsquellen können alternativ auch Ersatzstromquellen genutzt werden:

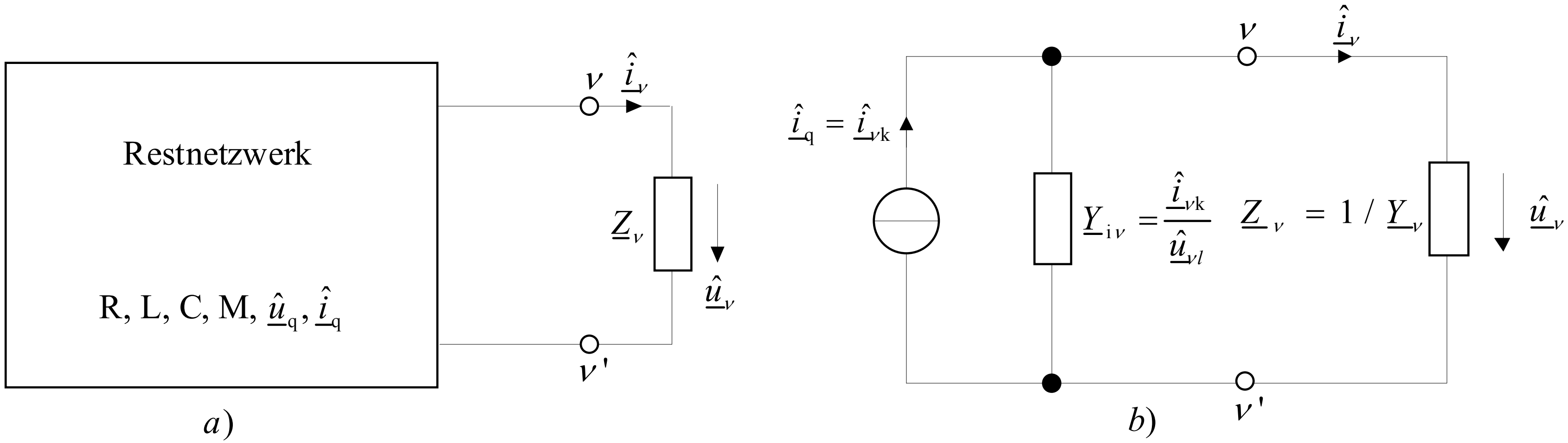
<u>Satz:</u>
In einem passiven Netzwerk mit ungesteuerten Quellen können Strom und Spannung an einer Last so bestimmt werden, dass das Netzwerk durch eine Ersatzstromquelle ersetzt wird.

Die Innenadmittanz der Ersatzstromquelle bestimmt sich aus der Leerlaufspannung und dem Kurzschlussstrom. Dieser Kurzschlussstrom ist zu bestimmen durch einen Kurzschluss des Netzwerks (anstelle der Last). Die Leerlaufspannung ergibt sich für den Fall ohne Last.

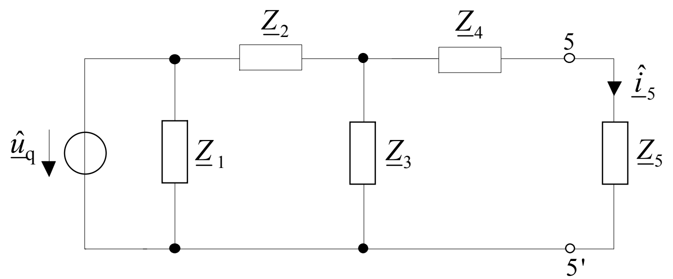
Alternative zur Bestimmung der Innenadmittanz:
- Ersatz aller Stromquellen durch Leerläufe
- Ersatz aller Spannungsquellen durch Kurzschlüsse
- Bestimmung der Ausgangsadmittanz

5.2 Der Satz zur Ersatzspannungsquelle

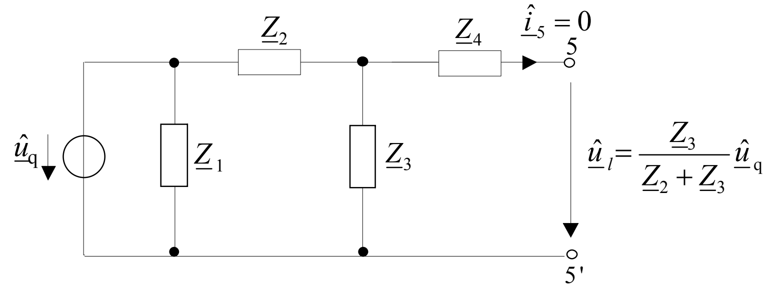
Das folgende Bild zeigt das Ersatzschaltbild für das Restnetzwerk:



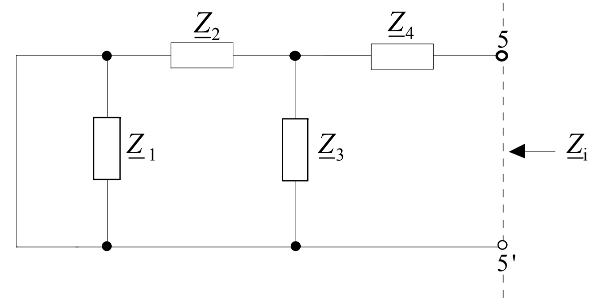
5.3 Weitere Beispiele



Anwendung des Satzes von der Ersatzspannungsquelle zur Bestimmung des Stroms durch die Last:

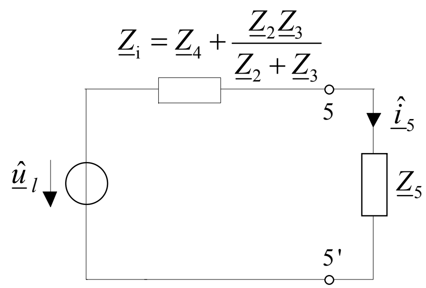


Die Innenimpedanz wird hier durch Netzwerkanalyse des Restnetzwerks durchgeführt.



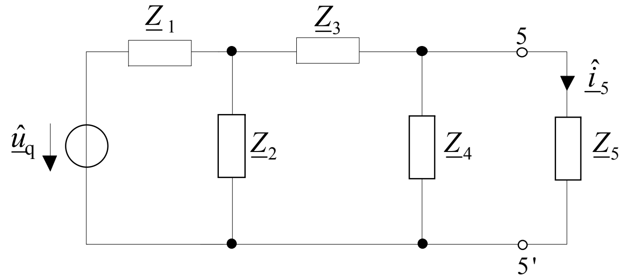
$$\hat{\underline{i}}_5 = \frac{\hat{\underline{u}}_l}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_5} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}\hat{\underline{u}}_q \frac{1}{\underline{Z}_4 + \dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} + \underline{Z}_5}$$

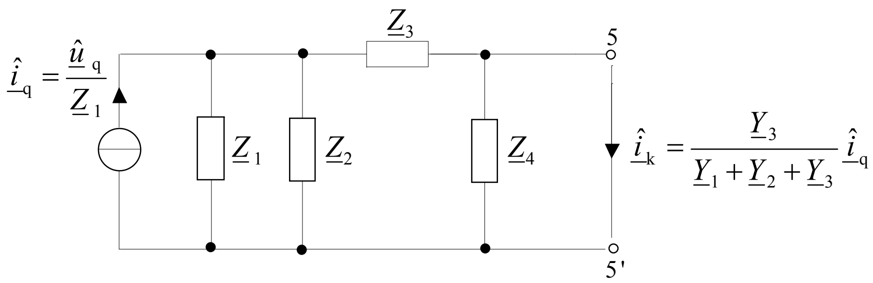
$$= \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2\left(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5\right) + \underline{Z}_3\left(\underline{Z}_4 + \underline{Z}_5\right)}\hat{\underline{u}}_q$$



5.3 Weitere Beispiele

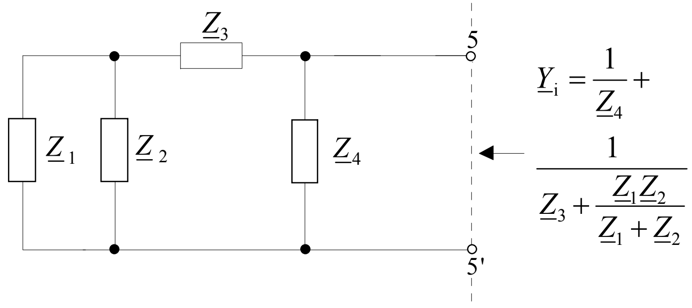
Anwendung des Satzes von der Ersatzstromquelle zur Bestimmung des Stroms durch die Last:





Es gilt:

$$\hat{\underline{i}}_5 = \frac{\underline{Y}_5}{\underline{Y}_i+\underline{Y}_5}\hat{\underline{i}}_k$$



Daraus resultiert nach einigen Umrechnungen:

$$\hat{\underline{i}}_5 = \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_4}{\left(\underline{Z}_4+\underline{Z}_5\right)\left(\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_1\underline{Z}_3+\underline{Z}_2\underline{Z}_3\right)+\underline{Z}_4\underline{Z}_5\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2\right)}\hat{\underline{u}}_q$$