

# Grundlagen der Elektrotechnik 3

## Kapitel 6

# FERNLEITUNGEN

---

Prof. Dr.-Ing. I. Willms

UNIVERSITÄT  
DUISBURG  
ESSEN

Grundlagen der Elektrotechnik 3

Fachgebiet  
Nachrichtentechnische Systeme

S. 1



# 6.1 Vorbemerkungen

Fernleitungen werden in verschiedenen Bereichen der Elektrotechnik verwendet:

In der elektrischen Energietechnik zur Übertragung von elektrischer Energie

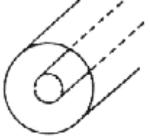
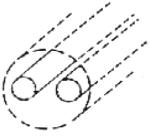
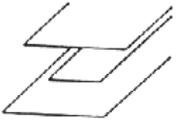
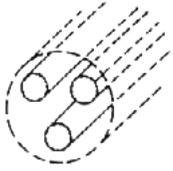
In der Informationstechnik zur Übertragung von Signalen

In der Hochfrequenztechnik als Schaltungselemente in Netzwerken

Die nachstehende Tabelle zeigt eine Zusammenstellung von Fernleitungstypen (Doppel oder Mehrfachleitungen)



# 6.1 Vorbemerkungen

Art	Typ	Querschnittsform	Anwendung	Physikalischer Ausbreitungsvorgang	Frequenzbereich
Doppelleitungen und Mehrleitersysteme	Koaxial		Energieübertragung Signalübertragung Schaltelement	Elektrisch : Angelegte Spannung verursacht Ströme in den Leitern	Theoretisch : $0 < f < \infty$  Praktisch : keine untere Frequenzgrenze; obere Frequenzgrenze durch Dämpfung und Störwellen
	Parallel draht		Energieübertragung Signalübertragung		
	Streifen		Energieübertragung Signalübertragung Schaltelement		
	Drehstrom		Energieübertragung (Signalübertragung)		

# 6.1 Vorbemerkungen

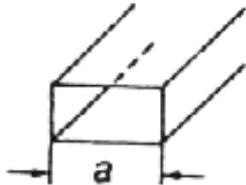
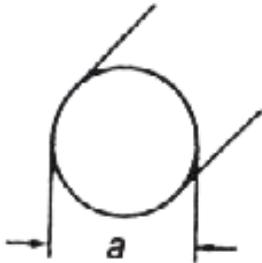
Fernleitungen können Gleich- oder Wechselstrom übertragen.

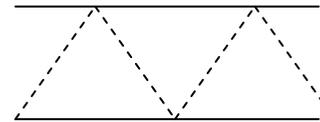
Mit wachsender Frequenz steigen die Verluste ( Leiter-, dielektrische Verluste und bei offenen Strukturen Verluste durch Abstrahlung).

Bei sehr hohen Frequenzen müssen andere Wellenleiter eingesetzt werden.

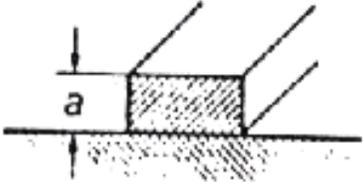
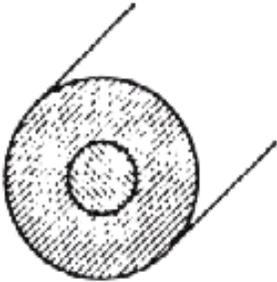


# 6.1 Vorbemerkungen

Art	Typ	Querschnittsform	Anwendung	Physikalischer Ausbreitungsvorgang	Frequenzbereich
Hohlleiter	Rechteck		Signalübertragung Schaltelement	Quasioptisch : Elektromagnetische Wellen breiten sich im Inneren unter fortwährender Reflexion an den Wänden nach den Gesetzen der Optik aus.	Theoretisch : $f_g < f < \infty$ mit $f_g = \frac{1}{a\sqrt{\mu\epsilon}}$  Praktisch : Obere Frequenzgrenze durch Störwellen, bzw. Streuung und Dämpfung
	Rund				

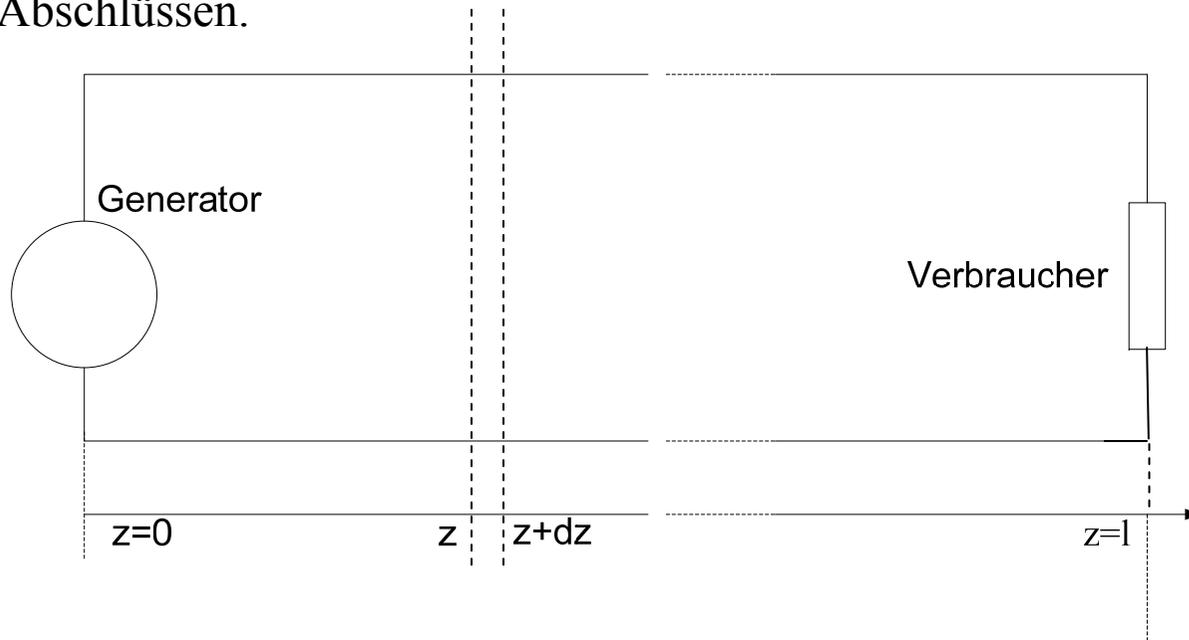


# 6.1 Vorbemerkungen

Art	Typ	Querschnittsform	Anwendung	Physikalischer Ausbreitungsvorgang	Frequenzbereich
Dielektrische Wellenleiter	Filme und Streifen auf Substraten		Schalt- und Verbindungselement der planaren und integrierten Optik	Quasioptisch : Elektromagnetische Wellen im Streifen bzw. Faserkern erfahren unter genügend kleinen Winkeln zur Achse Totalreflexion an den Grenzschichten. Ausbreitung ähnlich wie im Hohlleiter	Theoretisch : $0 < f < \infty$ Praktisch : Untere und obere Frequenzgrenzen durch Dämpfung, Strahlung, Störwellen
	Glasfasern		Optische Signalübertragung		

# 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

Betrachtet wird eine Anordnung bestehend aus zwei eng nebeneinanderliegenden dünnen zylindrischen Leitungen mit Abschlüssen.



Die Lösung dieses Problems gehört strenggenommen bereits zur Lehre der elektromagnetischen Wellen. Eine Lösung mit Hilfe von quasistationären Methoden (Netzwerkgrößen) ist möglich, wenn der Abstand der einzelnen Leiter im Verhältnis zur Betriebswellenlänge klein gehalten wird.

# 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

## Anmerkung:

Obwohl die nachstehenden Betrachtungen sich stets auf Doppeldraht-(Paralleldraht)systeme beschränken, gelten die gewonnenen Ergebnisse jedoch sinngemäß auch für alle Fernleitungstypen (z.B. Koaxialleitungen, abgeschirmte Doppelleitungen u.s.w.).

Weiterhin werden nur noch längshomogene Fernleitungen betrachtet (elektrisch homogene Umgebung, konstanter Querschnitt der Drähte, konstanter Abstand zwischen den Drähten).



# 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

Wie bereits weiter oben erwähnt, handelt es sich hier um längshomogene Fernleitungen. Für solche lassen sich die primären Fernleitungsparameter einführen:

1) Der Widerstandsbelag ( Kupfer- oder Längsverluste ) :

$$R' = \frac{dR}{dz} = const \quad [R'] = \frac{\Omega}{m}$$

2) Der Ableitungsbelag ( Isolations- oder Querverluste ) :

$$G' = \frac{dG}{dz} = const \quad [G'] = \frac{S}{m}$$

3) Der Induktivitätsbelag:

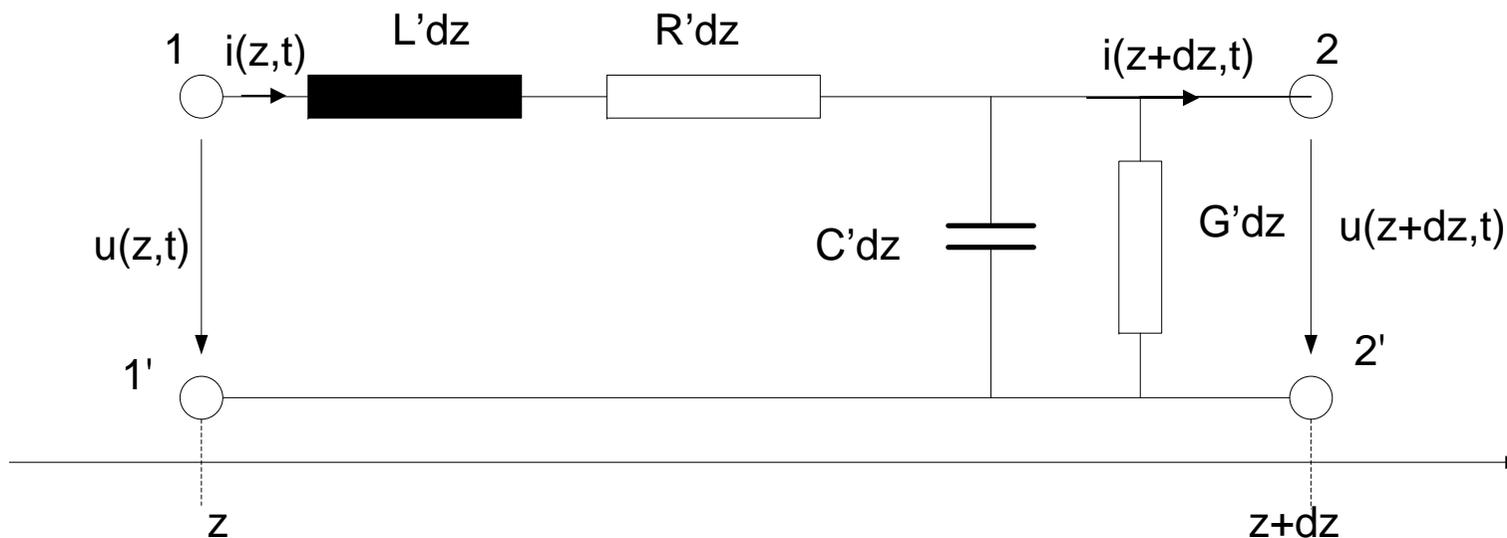
$$L' = \frac{dL}{dz} = const \quad [L'] = \frac{H}{m}$$



# 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

4) Der Kapazitätsbelag:

$$C' = \frac{dC}{dZ} = \text{const} \quad [C'] = \frac{F}{m}$$



## 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

Durch dieses Ersatzschaltbild läßt sich die Fernleitung mit Hilfe der Netzwerkgrößen  $u$  und  $i$  anstelle der Feldgrößen  $E$  und  $H$  beschreiben.

Die Maschengleichung läßt sich aufstellen in folgender Form:

$$u(z + dz, t) - u(z, t) + R' dz \cdot i(z, t) + L' dz \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} = 0$$

Für die Knotengleichung gilt :

$$i(z + dz, t) - i(z, t) + G' dz \cdot u(z, t) + C' dz \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = 0$$

Für die Größen  $u(z+dz, t)$  und  $i(z+dz, t)$  gelten folgende Taylor-Polynome erster Ordnung, die man in obige Gleichungen einfügt:

$$u(z + dz, t) = u(z, t) + \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} dz$$

$$i(z + dz, t) = i(z, t) + \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} dz$$



# 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

Mittels dieser Taylor-Polynome folgt aus der Maschen – bzw. Knotengleichung nach Einsetzen und anschließendem Kürzen von dz:

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + R' i(z,t) + L' \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} + G' u(z,t) + C' \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -G' u(z,t) - C' \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \quad (2a)$$

Es entsteht ein lineares System gekoppelter partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Zur Entkopplung dieser Differentialgleichungen wird (1) nach z und (2) nach t partiell abgeleitet.



## 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + R' \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} + L' \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} + G' \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} + C' \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = -R' \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} - L' \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} \quad (3a)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \partial z} = -G' \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} - C' \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} \quad (4a)$$

Aus (4a):  $\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -G' u(z,t) - C' \frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$  und wird in (3a) genutzt:

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = -R' \left( -G' u(z,t) - C' \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \right) - L' \left( -G' \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} - C' \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} \right)$$



## 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = -R'(-G'u(z,t) - C'\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}) - L'(-G'\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} - C'\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2})$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = R'G'u(z,t) + (R'C' + L'G')\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} + L'C'\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} \quad (5)$$

Auf analoge Weise läßt sich eine entkoppelte partielle Differentialgleichungen für  $i(z,t)$  angeben:

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = R'G'i(z,t) + (R'C' + L'G')\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + L'C'\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} \quad (6)$$

Die beiden Ausdrücke (5) und (6) werden als Telegraphengleichungen bezeichnet



# 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

Die Gleichungen (5) und (6) beschreiben die durch die Fernleitungen geführten Wellen für beliebige Zeitabhängigkeiten mittels Netzwerkgrößen  $u(z,t)$  und  $i(z,t)$  (also ohne Anwendung der Wellentheorie).

## Allgemeine Lösung der Telegraphengleichungen für harmonische Zeitabhängigkeiten

Als erster Schritt werden die Gleichungen (5) und (6) auf komplexe Form gebracht. Für die komplexen Netzwerkgrößen werden jeweils die entsprechenden Produktansätze nach Bernoulli gemacht.

Es werden folgende Ansätze gemacht:



## 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

$$\underline{u}(z, t) = \underline{\hat{u}}(z)e^{j\omega t} \quad (7)$$

$$\underline{i}(z, t) = \underline{\hat{i}}(z)e^{j\omega t} \quad (8)$$

Für die nun ortsabhängigen komplexen Zeiger  $\underline{\hat{u}}(z)$  und  $\underline{\hat{i}}(z)$  folgen damit aus (5) und (6) die komplexen Fernleitungsgleichungen:

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = R'G'u(z, t) + (R'C' + L'G')\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} + L'C'\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial z^2} = R'G'i(z, t) + (R'C' + L'G')\frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + L'C'\frac{\partial^2 i(z, t)}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \underline{\hat{u}}(z)}{dz^2} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')\underline{\hat{u}}(z) = \gamma^2 \underline{\hat{u}}(z) \quad (10)$$

$$\frac{d^2 \underline{\hat{i}}(z)}{dz^2} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')\underline{\hat{i}}(z) = \gamma^2 \underline{\hat{i}}(z) \quad (11)$$



# 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

Die Lösung dieses Systems ist gegeben durch:

$$\underline{\hat{u}}(z) = \underline{\hat{u}}_h e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{\hat{u}}_r e^{\underline{\gamma}z} \Leftrightarrow u(z,t) = u_h(z,t) + u_r(z,t) \quad (12)$$

$$\underline{\hat{i}}(z) = \underline{\hat{i}}_h e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{\hat{i}}_r e^{\underline{\gamma}z} \Leftrightarrow i(z,t) = i_h(z,t) - i_r(z,t) \quad (13)$$

Das Minuszeichen in (13) resultiert aus der geänderten Richtung des Strom der rücklaufenden Welle.

Die komplexen Zeiger  $\underline{\hat{u}}_h$ ,  $\underline{\hat{u}}_r$ ,  $\underline{\hat{i}}_h$  und  $\underline{\hat{i}}_r$  beschreiben die komplexen Scheitelwerte der Spannungen bzw. des Stromes einer vorlaufenden (Index h) bzw. rücklaufenden (Index r) Welle.  $\underline{\gamma}$  wird als Ausbreitungsmaß (Ausbreitungskoeffizient bezeichnet).

$$\underline{\gamma} = +\sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad (14)$$

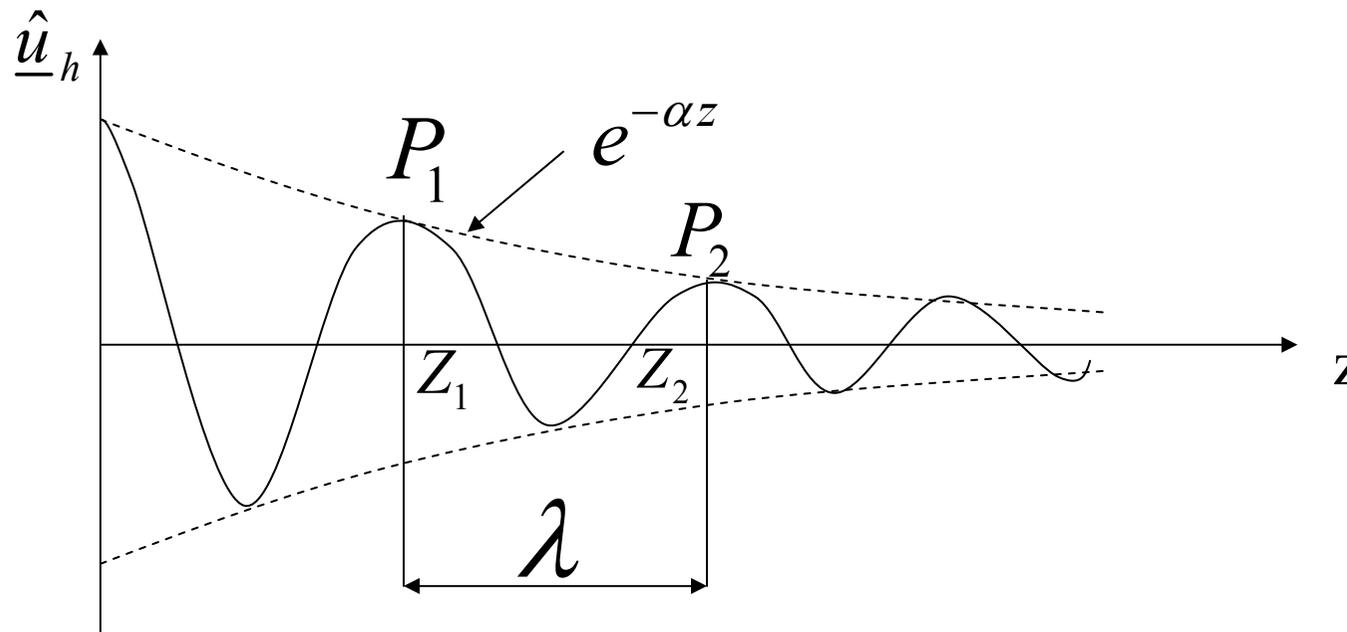


# 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

Real- und Imaginärteil des Ausbreitungsmaßes werden als Dämpfungsmaß (-koeffizient)  $\alpha$  und Phasenmaß (-koeffizient)  $\beta$  bezeichnet:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta \quad (15)$$

Betrachtet wird der Verlauf einer vorlaufenden Welle  $u_h(z, t)$  zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$ .  $u_h(z, t = \text{const})$



## 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

Es gilt:  $u_h(z, t) = \operatorname{Re}\{\hat{\underline{u}}_h e^{(-\alpha - j\beta)z} e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{\hat{\underline{u}}_h e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)}\}$  (16)

$$= \hat{u}_h e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (17)$$

Es werden nun die Koordinaten der Punkte  $P_2$  und  $P_1$  bestimmt, die einer vollen Phasendrehung entsprechen sollen:

$$(\omega t - \beta z_2) \Big|_{t=\text{const}} - (\omega t - \beta z_1) \Big|_{t=\text{const}} \stackrel{!}{=} 2\pi \quad (18)$$

Mit  $z_2 - z_1 = \lambda$  folgt hieraus  $\beta\lambda = 2\pi \Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$  (19)

Für die Phasengeschwindigkeit gilt:  $V_{ph} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{\beta}$  (20)



# 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

## Sekundäre Fernleitungsparameter

Die Differentialgleichungen (1) und (2) sollen nun im Bildbereich unter Verwendung der ortsabhängigen komplexen Zeiger dargestellt werden:

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + R' i(z,t) + L' \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} + G' u(z,t) + C' \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Dazu werden nun (1) und (2) in den Bildbereich unter Verwendung der Ansätze (7) – (9) überführt:

$$-\frac{\partial \underline{\hat{u}}(z)}{\partial z} = (R' + j\omega L') \underline{\hat{i}}(z) \quad (21)$$

$$-\frac{\partial \underline{\hat{i}}(z)}{\partial z} = (G' + j\omega C') \underline{\hat{u}}(z) \quad (22)$$



# 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

Es wird nun Gleichung (21) herangezogen und darin Strom und Spannung durch die Ausdrücke für hin- und rücklaufende Wellen ersetzt.

Dies erfordert die Gleichung (12) nach  $z$  zu differenzieren.

$$\frac{\partial}{\partial z} \underline{\hat{u}}(z) = -\underline{\gamma} \underline{\hat{u}}_h e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{\gamma} \underline{\hat{u}}_r e^{\underline{\gamma}z} \quad \underline{\hat{i}}(z) = \underline{\hat{i}}_h e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{\hat{i}}_r e^{\underline{\gamma}z} \quad (12a+13)$$

$$-\frac{\partial \underline{\hat{u}}(z)}{\partial z} = -(-\underline{\gamma} \underline{\hat{u}}_h e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{\gamma} \underline{\hat{u}}_r e^{\underline{\gamma}z}) = (R' + j\omega L')(\underline{\hat{i}}_h e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{\hat{i}}_r e^{\underline{\gamma}z}) \quad (21a)$$

$$\Rightarrow \underline{\gamma} \cdot \underline{\hat{u}}_h e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{\gamma} \cdot \underline{\hat{u}}_r e^{\underline{\gamma}z} = (R' + j\omega L')(\underline{\hat{i}}_h e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{\hat{i}}_r e^{\underline{\gamma}z})$$

Nach getrenntem Vergleich für die hin/rücklaufenden Wellenanteile ergibt sich:

$$\underline{\hat{u}}_{h,r} = \frac{R' + j\omega L'}{\underline{\gamma}} \underline{\hat{i}}_{h,r} = \frac{R' + j\omega L'}{\sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}} \underline{\hat{i}}_{h,r} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \underline{\hat{i}}_{h,r} \quad (23)$$



## 6.2 Beschreibung der Fernleitungen

(24)

Der komplexe Faktor in den Gln.(23) und (24) wird als Wellenwiderstand bezeichnet, obwohl er im allgemeinen eine komplexe Größe ist. Er ist bezeichnet wie folgt:

$$Z_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (25)$$

Die Größen  $\underline{\gamma}$  und  $Z_L$  werden als sekundäre Fernleitungsparameter bezeichnet.



# Grundlagen der Elektrotechnik 3

## Kapitel 6.3

### Dispersionseigenschaften der sekundären Fernleitungsparameter

---

Prof. Dr.-Ing. I. Willms

UNIVERSITÄT  
DUISBURG  
ESSEN

Grundlagen der Elektrotechnik 3

Fachgebiet  
Nachrichtentechnische Systeme

S. 23



## 6.3.1 Analyse des Ausbreitungsmaßes

$$\begin{aligned}\text{Es gilt: } \underline{\gamma} &= \alpha + j\beta = +\sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \sqrt{R' + j\omega L'}\sqrt{G' + j\omega C'} \\ \underline{\gamma}^2 &= \alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') \\ &= R'G' + j\omega(L'G' + R'C') - \omega^2 L'C'\end{aligned}$$

Hieraus werden die folgenden Größen bestimmt, welche andererseits die Bestimmung von  $\alpha$  und  $\beta$  vorbereiten:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{\underline{\gamma}^2\} &= \alpha^2 - \beta^2 = R'G' - \omega^2 L'C' \\ |\underline{\gamma}|^2 &= \alpha^2 + \beta^2 = |(R' + j\omega L')||G' + j\omega C'| \\ &= \sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)}\end{aligned}$$



## 6.3.1 Analyse des Ausbreitungsmaßes

Daraus folgt dann:

$$\operatorname{Re}\{\underline{\gamma}^2\} + |\underline{\gamma}^2| = 2\alpha^2 = R'G' - \omega^2 L'C' + \sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)}$$

$$-\operatorname{Re}\{\underline{\gamma}^2\} + |\underline{\gamma}^2| = 2\beta^2 = -(R'G' - \omega^2 L'C') + \sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(R'G' - \omega^2 L'C') + \frac{1}{2}\sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)}} \quad (26)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 L'C' - R'G') + \frac{1}{2}\sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)}} \quad (27)$$



## 6.3.2 Analyse des Fernleitungs-Wellenwiderstandes

Der Fernleitungs-Wellenwiderstand angegeben durch:

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

Als komplexe Größe ist er angebar in algebraischer Form oder in Polarform:

$$\underline{Z}_L = \operatorname{Re}\{\underline{Z}_L\} + j \operatorname{Im}\{\underline{Z}_L\} = |\underline{Z}_L| e^{j\varphi_{Z_L}}$$

Für den Betrag des Wellenwiderstandes gilt:

$$|\underline{Z}_L|^2 = \frac{|R' + j\omega L'|}{|G' + j\omega C'|} = \frac{\sqrt{R'^2 + (\omega L')^2}}{\sqrt{G'^2 + (\omega C')^2}} \Rightarrow |\underline{Z}_L| = \sqrt[4]{\frac{R'^2 + \omega^2 L'^2}{G'^2 + \omega^2 C'^2}} \quad (28)$$



## 6.3.2 Analyse des Fernleitungs- Wellenwiderstandes

Der Winkel  $\varphi_{Z_L}$  wird aus der komplexen Größe  $\underline{Z}_L$  bestimmt.

Es gilt hier:

$$\varphi_{Z_L} = \frac{1}{2} \arctan \left[ \frac{\omega(G'L' - R'C')}{R'G' + \omega^2 L'C'} \right] \quad (29)$$

wegen :

$$\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'} = \frac{(R' + j\omega L')(G' - j\omega C')}{G'^2 - (\omega C')^2} = \frac{R'G' + \omega^2 L'C' + j\omega(G'L' - R'C')}{G'^2 - (\omega C')^2}$$



## 6.3.3 Verlustlose Fernleitungen

Hierfür gelten die Bedingungen:  $R' = 0 \quad G' = 0$

Erwartungsgemäß besitzen solche Fernleitungen keine Dämpfung, daher  $\alpha = 0$  (30)  
gilt:

Das Phasenmaß läßt sich aus  $\operatorname{Re}\{\underline{\gamma}^2\} = \alpha^2 - \beta^2 = R'G' - \omega^2 L'C'$

berechnen zu:  $\beta = \omega\sqrt{L'C'}$  (31)

Die Phasengeschwindigkeit ergibt sich zu (s.Gl.(20))  $V_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$  (32)

Bei diesem Leitungstyp ist der Fernleitungs-Wellenwiderstand eine reelle Größe. Dies ist wichtig in Anwendungen!

$$\underline{Z}_L = Z_L = \sqrt{\frac{j\omega L'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (33)$$



# 6.3.4 Verlustarme/stark verlustbehaftete Fernleitungen

Für verlustarme Fernleitungen gelten folgende Bedingungen:

$$\omega L' \gg R' \quad \omega C' \gg G'$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = j\omega \sqrt{L'C' \left(1 - \frac{jR'}{\omega L'}\right) \left(1 - \frac{jG'}{\omega C'}\right)}$$

Für stark verlustbehaftete Leitungen gilt für den Sonderfall  $L'G' = R'C'$  :

$$\underline{\gamma} \approx j\omega \sqrt{L'C'} \left[ 1 + \frac{R'}{j\omega L'} \right]$$

$$\underline{Z}_L \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \left( 1 - j \left( \frac{R'}{2\omega L'} - \frac{G'}{2\omega C'} \right) \right) = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$



# Grundlagen der Elektrotechnik 3

## Kapitel 6.4

### Berechnung der Fernleitungen endlicher Länge

---

Prof. Dr.-Ing. I. Willms

UNIVERSITÄT  
DUISBURG  
ESSEN

Grundlagen der Elektrotechnik 3

Fachgebiet  
Nachrichtentechnische Systeme

S. 30



# 6.4 Berechnung der Fernleitungen endlicher Länge

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie die Fernleitungen sich als Netzwerke behandeln lassen und somit Schaltungen, die auch Fernleitungen beinhalten, mit Methoden der Netzwerktheorie beschrieben werden können.

Diese Schaltungen werden wie folgt dargestellt:

- Fernleitungen durch zwei parallele Linien
- Konzentrierte Teile der Schaltungen mit dünneren Linien



## 6.4.1 Fernleitungen als Zweitore

Im Abschnitt 5.2 wurde gezeigt, daß die allgemeine Lösung der Telegraphengleichungen nach Verwendung des Produktansatzes (s. Gln. (12), (13)) folgende Form hat:

$$\underline{\hat{u}}(z, t) = \underline{\hat{u}}_h e^{j\omega t - \underline{\gamma}z} + \underline{\hat{u}}_r e^{j\omega t + \underline{\gamma}z} \quad (45)$$

$$\underline{\hat{i}}(z, t) = \underline{\hat{i}}_h e^{j\omega t - \underline{\gamma}z} - \underline{\hat{i}}_r e^{j\omega t + \underline{\gamma}z} \quad (46)$$

mit

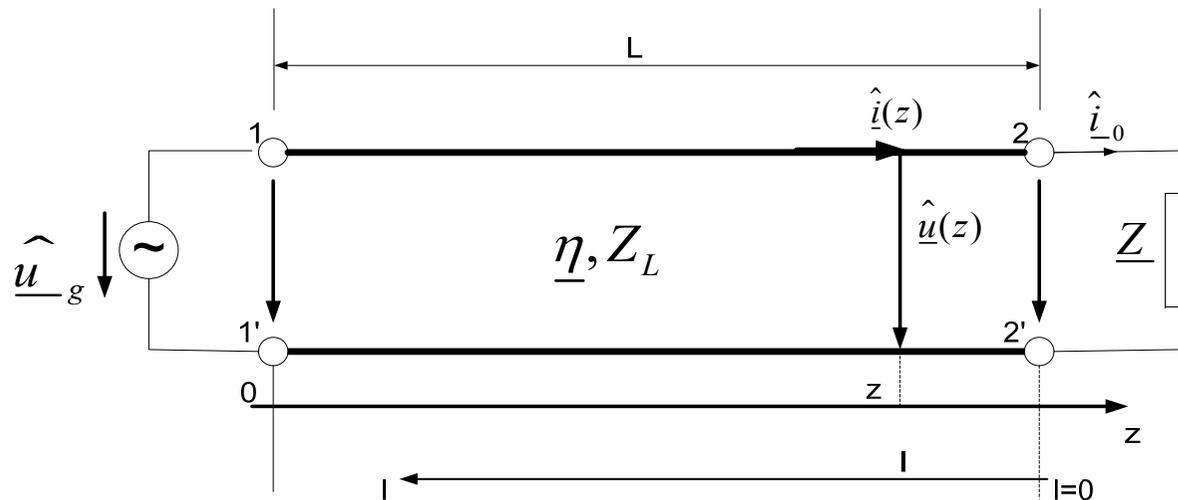
$$\underline{\hat{u}}_{h,r} = \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_{h,r} \quad (47)$$



# 6.4.1 Fernleitungen als Zweitore

Im folgenden wird von der Betrachtung der Zeitabhängigkeit abgesehen, d.h., es wird mit ortsabhängigen Zeigern gerechnet.

Betrachtet wird eine Fernleitung der Länge  $L$ , die am Anfang mit einer idealen Spannungsquelle und am Ende mit einer beliebigen Impedanz abgeschlossen ist.



## 6.4.1 Fernleitungen als Zweitore

An einer bestimmten Stelle  $z$  lassen sich die komplexen Zeiger wie folgt angeben:

$$\underline{\hat{u}}(z) = \underline{\hat{u}}_h e^{-\gamma z} + \underline{\hat{u}}_r e^{\gamma z} \quad (48)$$

$$\underline{Z}_L \underline{\hat{i}}(z) = \underline{\hat{u}}_h e^{-\gamma z} - \underline{\hat{u}}_r e^{\gamma z} \quad (49)$$

Die Größen  $\underline{\hat{u}}_h$  und  $\underline{\hat{u}}_r$  entsprechen den Spannungs- und Strombedingungen am Anfang der Fernleitung.

In der Praxis sind mitunter Spannung und Strom z.B. nur am Ende einer Fernleitung (d.h. an der Stelle  $z = L$ ) bekannt. Diese Größen sollen im Folgenden genutzt werden.



# 6.4.1 Fernleitungen als Zweitore

Zunächst wird eine Koordinatentransformation mit

$$z = L - l \quad \text{vorgenommen.}$$

Damit gilt:

$$\underline{\hat{u}}(l) = \underline{\hat{u}}_h e^{-\underline{\gamma}(L-l)} + \underline{\hat{u}}_r e^{\underline{\gamma}(L-l)} \quad (50)$$

$$\underline{Z}_L \underline{\hat{i}}(l) = \underline{\hat{u}}_h e^{-\underline{\gamma}(L-l)} - \underline{\hat{u}}_r e^{\underline{\gamma}(L-l)} \quad (51)$$

Werden die Netzwerkgrößen am Ende der Fernleitung vorgegeben (oder gemessen) so gilt:

$$\underline{\hat{u}}_0 = \underline{\hat{u}}(l=0) = \underline{\hat{u}}_h e^{-\underline{\gamma}L} + \underline{\hat{u}}_r e^{\underline{\gamma}L}$$

$$\underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0 = \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}(l=0) = \underline{\hat{u}}_h e^{-\underline{\gamma}L} - \underline{\hat{u}}_r e^{\underline{\gamma}L}$$



## 6.4.1 Fernleitungen als Zweitore

Über die Addition bzw. über die Subtraktion der letzten beiden Gleichungen ergeben sich die Konstanten zu:

$$\underline{\hat{u}}_h = \frac{1}{2} \left( \underline{\hat{u}}_0 + \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0 \right) e^{\gamma L} \quad (52)$$

$$\underline{\hat{u}}_r = \frac{1}{2} \left( \underline{\hat{u}}_0 - \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0 \right) e^{-\gamma L} \quad (53)$$

Damit lassen sich die Gln. (50) und (51) wie folgt darstellen:

$$\underline{\hat{u}}(l) = \frac{1}{2} \left( \underline{\hat{u}}_0 + \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0 \right) e^{\gamma l} + \frac{1}{2} \left( \underline{\hat{u}}_0 - \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0 \right) e^{-\gamma l} = \underline{\hat{u}}_h(l) + \underline{\hat{u}}_r(l) \quad (54)$$

$$\underline{Z}_L \underline{\hat{i}}(l) = \frac{1}{2} \left( \underline{\hat{u}}_0 + \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0 \right) e^{\gamma l} - \frac{1}{2} \left( \underline{\hat{u}}_0 - \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0 \right) e^{-\gamma l} = \underline{\hat{u}}_h(l) - \underline{\hat{u}}_r(l) \quad (55)$$



# 6.4.1 Fernleitungen als Zweitore

Es können die Terme mit identischen Koeffizienten vor den Funktionen “  $\exp(\pm \underline{\gamma}l)$  ” zusammengefaßt werden. So gilt z.B. für  $\underline{\hat{u}}(l)$

$$\underline{\hat{u}}(l) = \underline{\hat{u}}_0 \frac{e^{\underline{\gamma}l} + e^{-\underline{\gamma}l}}{2} + \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0 \frac{e^{\underline{\gamma}l} - e^{-\underline{\gamma}l}}{2}$$

Diese Relation kann mittels der Hyperbelfunktionen vereinfacht werden

Achtung: Vorzeichenwechsel in der Gleichung (57):

$$\underline{\hat{u}}(l) = \underline{\hat{u}}_0 \cosh(\underline{\gamma}l) + \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0 \sinh(\underline{\gamma}l) \quad (56)$$

$$\underline{\hat{i}}(l) = \frac{\underline{\hat{u}}_0}{\underline{Z}_L} \sinh(\underline{\gamma}l) + \underline{\hat{i}}_0 \cosh(\underline{\gamma}l) \quad (57)$$



## 6.4.1 Fernleitungen als Zweitore

Die Gln.(54) und (55) (in physikalisch leicht interpretierbarer Form) bzw. Gln. (56) und (57) werden als Fernleitungsgleichungen bezeichnet.

Das System der Gln.(56) und (57) kann auch in Matrixform geschrieben werden. Es gilt

$$\begin{pmatrix} \underline{\hat{u}}(l) \\ \underline{\hat{i}}(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\underline{\gamma}l) & \underline{Z}_L \sinh(\underline{\gamma}l) \\ \frac{1}{\underline{Z}_L} \sinh(\underline{\gamma}l) & \cosh(\underline{\gamma}l) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\hat{u}}_0 \\ \underline{\hat{i}}_0 \end{pmatrix} \quad (58)$$

Das ist offenbar eine Kettenparameter – Darstellung, hier die einer Fernleitung der Länge “l” als Zweitor.

Die Elemente der Matrix sind natürlich die Kettenparameter.

Ein solches Stück Fernleitung stellt stets ein reziprokes und längs-symmetrisches Zweitor dar.



## 6.4.1 Fernleitungen als Zweitore

$$\underline{\vec{a}} = \begin{pmatrix} \cosh(\underline{\gamma}l) & \underline{Z}_L \sinh(\underline{\gamma}l) \\ \frac{1}{\underline{Z}_L} \sinh(\underline{\gamma}l) & \cosh(\underline{\gamma}l) \end{pmatrix} \quad (59)$$

Sowohl die Reziprozitätsbedingung

$$\det(\underline{\vec{a}}) = \cosh^2(\underline{\gamma}l) - \sinh^2(\underline{\gamma}l) = 1$$

als auch die Bedingung für die Symmetrie

$$\underline{a}_{22} = \underline{a}_{11} = \cosh(\underline{\gamma}l)$$

sind hier erfüllt.



# 6.4.1 Fernleitungen als Zweitore

Die Fernleitungsgleichungen (56) und (57) können auch bezogen auf Spannung  $\hat{\underline{u}}_0$  und Strom  $\hat{\underline{i}}_0$  am Ende der Fernleitung leicht umformuliert werden. Es gilt dann:

$$\frac{\hat{\underline{u}}(l)}{\hat{\underline{u}}_0} = \cosh(\underline{\gamma}l) + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}} \sinh(\underline{\gamma}l)$$

$$\frac{\hat{\underline{i}}(l)}{\hat{\underline{i}}_0} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_L} \sinh(\underline{\gamma}l) + \cosh(\underline{\gamma}l)$$

Für die Abschlußimpedanz gilt:  $\underline{Z} = \frac{\hat{\underline{u}}_0}{\hat{\underline{i}}_0}$



# 6.4.1 Fernleitungen als Zweitore

**Sonderfall:** Verlustlose Fernleitungen. Für diese gilt:

$$\underline{\gamma}l \Big|_{\alpha=0} = j\beta l, \quad \cosh(\underline{\gamma}l) \Big|_{\alpha=0} = \cos(\beta l)$$

$$\sinh(\underline{\gamma}l) \Big|_{\alpha=0} = j \sin(\beta l) \quad \underline{Z}_L = Z_L \text{ (rein reell)}$$

Damit folgt:  $\hat{u}(l) = \hat{u}_0 \cos(\beta l) + jZ_L \hat{i}_0 \sin(\beta l)$  (60)

$$\hat{i}(l) = j \frac{\hat{u}_0}{Z_L} \sin(\beta l) + \hat{i}_0 \cos(\beta l)$$
 (61)

Für die Matrix der Kettenparameter folgt:

$$\underline{\vec{a}} = \begin{pmatrix} \cos(\beta l) & jZ_L \sin(\beta l) \\ \frac{j}{Z_L} \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{pmatrix}$$
 (62)



## 6.4.2 Eingangsimpedanz einer Fernleitung der Länge “1”

Betrachtet werden soll die weiter oben definierte Fernleitung.

Gesucht wird deren Eingangsimpedanz an der Stelle “1”. Dafür gilt nach Gln.(56),(57), die hier als Zähler- und Nennerausdruck verwendet werden:

$$\underline{Z}_E(l) = \frac{\hat{u}(l)}{\hat{i}(l)} = \frac{\hat{u}_0 \cosh(\underline{\gamma}l) + \underline{Z}_L \hat{i}_0 \sinh(\underline{\gamma}l)}{\frac{\hat{u}_0}{\underline{Z}_L} \sinh(\underline{\gamma}l) + \hat{i}_0 \cosh(\underline{\gamma}l)} = \frac{\hat{u}_0 + \underline{Z}_L \frac{\hat{i}_0 \sinh(\underline{\gamma}l)}{\hat{i}_0 \cosh(\underline{\gamma}l)}}{\frac{\hat{u}_0}{\underline{Z}_L} \frac{\sinh(\underline{\gamma}l)}{\cosh(\underline{\gamma}l)} + 1}$$

Daraus folgt:

$$\underline{Z}_E(l) = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z} + \underline{Z}_L \tanh(\underline{\gamma}l)}{\underline{Z}_L + \underline{Z} \tanh(\underline{\gamma}l)} \quad \text{mit } \underline{Z} = \frac{\hat{u}_0}{\hat{i}_0} \quad (63)$$

**Sonderfall** Verlustlose Fernleitungen  $\underline{Z}_E(l) = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z} + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{\underline{Z}_L + j\underline{Z} \tan(\beta l)}$  (64)  
 Hierfür gilt:



## 6.4.3 Der Reflexionsfaktor

### Der Spannungsreflexionsfaktor

Dieser Faktor gibt an, welcher Teil der hinlaufenden Spannungswelle durch Reflexion am Leitungsende im Vergleich zur rücklaufenden Welle existiert. Er wird angegeben durch:

$$\underline{r}(l) = \frac{\hat{\underline{u}}_r(l)}{\hat{\underline{u}}_h(l)} = \frac{\hat{\underline{u}}_r e^{-\gamma l}}{\hat{\underline{u}}_h e^{\gamma l}} \quad (65)$$

Unter Zuhilfenahme der Gl. (54) läßt sich schreiben:

$$\hat{\underline{u}}(l) = \frac{1}{2} \left( \hat{\underline{u}}_0 + \underline{Z}_L \hat{\underline{i}}_0 \right) e^{\gamma l} + \frac{1}{2} \left( \hat{\underline{u}}_0 - \underline{Z}_L \hat{\underline{i}}_0 \right) e^{-\gamma l} \quad (54a)$$

Ein Vergleich der Terme in obigen Relationen liefert dann:

$$\underline{r}(l) = \frac{\hat{\underline{u}}_0 - \underline{Z}_L \hat{\underline{i}}_0}{\hat{\underline{u}}_0 + \underline{Z}_L \hat{\underline{i}}_0} e^{-2\gamma l}$$



## 6.4.3 Der Reflexionsfaktor

An der Stelle  $l = 0$  beträgt der Spannungsreflexionsfaktor

$$\text{mit } \underline{Z} = \frac{\hat{u}_0}{\hat{i}_0} \quad \underline{r}(l=0) = \underline{r}_0 = \frac{\hat{u}_0 - \underline{Z}_L \hat{i}_0}{\hat{u}_0 + \underline{Z}_L \hat{i}_0} = \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_L}{\underline{Z} + \underline{Z}_L} \quad (66)$$

$$\text{Damit gilt } \underline{r}(l) = \underline{r}_0 e^{-2\gamma l} \quad (67)$$

Hinweis: Der Reflektionsfaktor kann nur Werte zwischen -1 und +1 annehmen!

**Sonderfall** Für verlustlose Fernleitungen gilt:

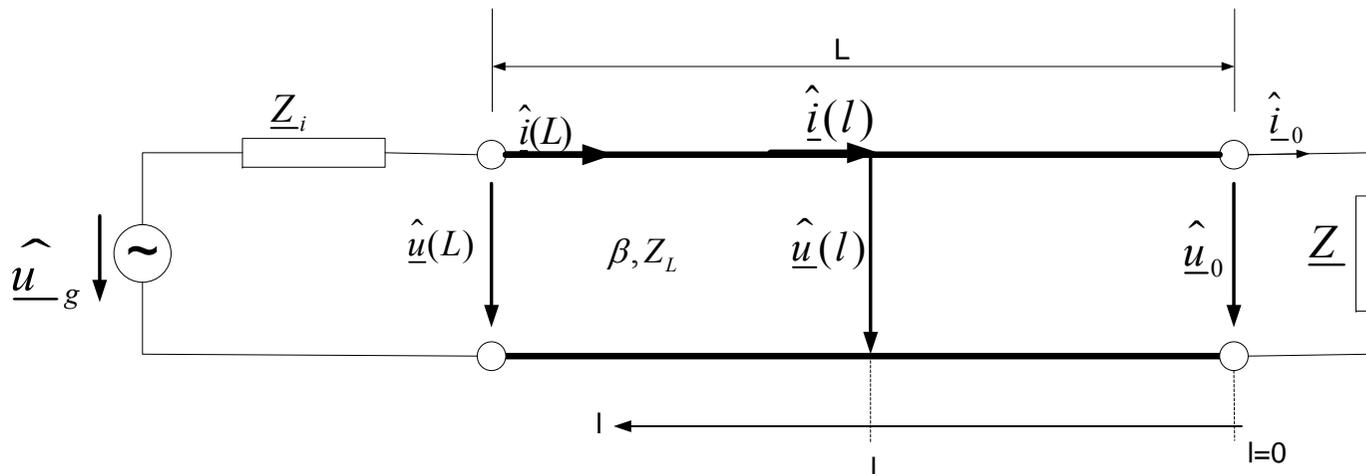
$$\underline{r}(l) = \underline{r}_0 e^{-2j\beta l} \quad (68)$$

# 6.4.4 Verlustlose Fernleitungen

## Verlustlose Fernleitungen

In der Praxis wird oft mit kurzen Leitungstücken gearbeitet, bei denen auch die Verluste in erster Näherung vernachlässigt werden können. Derartige "Fernleitungen" werden durch das Phasenmaß " $\beta$ ", einen rein reellen Wellenwiderstand " $Z_L$ " und die Länge " $L$ " beschrieben.

Die unten dargestellte Schaltung wird nun weiter betrachtet.



## 6.4.4 Verlustlose Fernleitungen

Sonderfall 1 Abschluß mit dem Wellenwiderstand  $\underline{Z} = Z_L$

Es kann leicht eingesehen werden, daß die rücklaufenden Wellen verschwinden. Die Fernleitung ist hier reflexionsfrei abgeschlossen, weil es gilt:

$$\underline{r}_0 = \left. \frac{\underline{Z} - Z_L}{\underline{Z} + Z_L} \right|_{\underline{Z}=Z_L} = 0$$

Die Eingangsimpedanz beträgt (s.Gl.(64))

$$\underline{Z}_E(l) = Z_L \left. \frac{\underline{Z} + jZ_L \tan(\beta l)}{Z_L + j\underline{Z} \tan(\beta l)} \right|_{\underline{Z}=Z_L} = Z_L$$

Dieser Wert ist von der Länge “L” unabhängig. Dieser Fall ist für die Praxis sehr wichtig, er wird als (Wellen-)Anpassung der Fernleitung bezeichnet und wird in der Regel angestrebt. In diesem Fall ist die Anpassung zudem auch eine Widerstandsanpassung, d.h., eine Leistungsanpassung.



## 6.4.4 Verlustlose Fernleitungen

Sonderfall 2: Eine am Ende kurzgeschlossene Fernleitung  $\underline{Z} = 0$

Für den Spannungsreflexionsfaktor gilt damit:

$$\underline{r}_0 = \left. \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_L}{\underline{Z} + \underline{Z}_L} \right|_{\underline{Z}=0} = -1 \quad \underline{r}(l) = -e^{-2j\beta l}$$

Das bedeutet aber, daß am Ende der Fernleitung eine totale Reflexion entsteht. Die Spannungen sind wegen  $\underline{\hat{u}}_h(0) = -\underline{\hat{u}}_r(0)$  um  $180^\circ$  in der Phase verschoben und heben sich auf.

Es gilt selbstverständlich:  $\underline{\hat{u}}(0) = \underline{\hat{u}}_0 = 0$

Im Gegensatz zu den Spannungen addieren sich die Ströme nach Gl. (55) zu:

$$\underline{Z}_L \underline{\hat{i}}(l) = \frac{1}{2} (\underline{\hat{u}}_0 + \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0) e^{\gamma l} - \frac{1}{2} (\underline{\hat{u}}_0 - \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0) e^{-\gamma l} \Big|_{l=0; \underline{\hat{u}}_0=0}$$
$$\Rightarrow \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}(0) = \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0 = \frac{1}{2} \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0 + \frac{1}{2} \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0 \quad \text{mit} \quad \underline{\hat{i}}_0 = \frac{2\underline{\hat{u}}_h e^{-\beta L}}{\underline{Z}_L}$$



## 6.4.4 Verlustlose Fernleitungen

Die Eingangsimpedanz wird für die am Ende kurzgeschlossene Leitung beschrieben durch:

$$\underline{Z}_E(l) = jZ_L \tan(\beta l)$$

Wenn zusätzlich die Leitung sehr kurz ist im Vergleich zur Wellenlänge gilt:

$$l \ll \lambda, \quad \beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \tan(\beta l) \approx \beta l = \omega \sqrt{L' C'} l$$

Damit gilt schließlich:

$$\underline{Z}_E(l) = j \sqrt{\frac{L'}{C'}} \omega \sqrt{L' C'} l = j \omega L' l$$

Eine sehr kurze, am Ende kurzgeschlossene Fernleitung verhält sich also wie eine Induktivität “ $L'l$ ”.



# 6.4.4 Verlustlose Fernleitungen

**Sonderfall 3** Eine am Ende leerlaufende Fernleitung:  $\underline{Z} \rightarrow \infty$

Für den Spannungsreflexionsfaktor gilt dann:  $\underline{r}_{-0} = 1$

In diesem Falle heben sich die Ströme auf und die Spannungen addieren sich (ebenfalls totale Reflexion).

$$\underline{\hat{u}}(l) = \frac{1}{2}(\underline{\hat{u}}_0 + \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0) e^{\gamma l} + \frac{1}{2}(\underline{\hat{u}}_0 - \underline{Z}_L \underline{\hat{i}}_0) e^{-\gamma l} \Big|_{l=0; \underline{\hat{i}}_0=0}$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{u}}(0) = \underline{\hat{u}}_0 = \frac{1}{2} \underline{\hat{u}}_0 + \frac{1}{2} \underline{\hat{u}}_0$$

Für die Eingangsimpedanz gilt:  $\underline{Z}_E(l) = \frac{\underline{Z}_L}{j \tan(\beta l)}$  (70)

Für eine sehr kurze Fernleitung ergibt sich dann:  $\underline{Z}_E(l) = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \frac{1}{j\omega\sqrt{L'C'l}} = \frac{1}{j\omega C'l}$

Damit verhält sie sich wie eine Kapazität “ $C'l$ ”.



# 6.4.4 Verlustlose Fernleitungen

Sonderfall 4:  $\lambda / 4$ -Transformator mit der Länge  $L = \lambda / 4$

Dafür gilt: 
$$\beta L = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Für den Spannungsreflexionsfaktor gilt damit:

$$\underline{r}(L) = \underline{r}_0 e^{-j2\beta L} = \underline{r}_0 e^{-j\pi} = -\underline{r}_0$$

Der Ausgangs–Reflexionsfaktor wird mit einer Phasenverschiebung von  $180^\circ$  zum Eingang transformiert. Die Eingangsimpedanz lautet wie folgt.

$$\underline{Z}_E(l) = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z} + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{\underline{Z}_L + j\underline{Z} \tan(\beta l)} \Big|_{\tan(\beta l) \rightarrow \infty, l=L} = \frac{\underline{Z}_L^2}{\underline{Z}}$$



## 6.4.4 Verlustlose Fernleitungen

Diese Transformationseigenschaft kann ausgenutzt werden, indem  $\underline{Z} = R$  gewählt wird. So kann der Generator angepaßt abgeschlossen werden, für den gilt  $\underline{Z}_i = R_i$  und  $Z_L$  folgende Bedingung erfüllt:  $Z_L = \sqrt{R_i R}$  (71)

Damit folgt: 
$$\underline{Z}_E(L) = \frac{Z_L^2}{\underline{Z}} = \frac{R_i R}{R} = R_i \quad \underline{Z}_E(0) = Z_L \frac{\underline{Z} + jZ_L \tan(\beta l)}{Z_L + j\underline{Z} \tan(\beta l)} \Big|_{l=0} = \underline{Z} = R$$

Es liegt damit Anpassung auf beiden Seiten der Leitung vor!

Sonderfall 5:  $\lambda / 2$  - Transformator  $L = \lambda / 2$

Dafür gilt:  $\beta L = \pi$

Der Spannungsreflexionsfaktor am Eingang kann wie folgt angegeben werden:

$$\underline{r}(L) = \underline{r}_0 e^{-j2\beta L} = \underline{r}_0 e^{-j2\pi} = \underline{r}_0$$



## 6.4.4 Verlustlose Fernleitungen

Für die Eingangsimpedanz gilt:

$$\underline{Z}_E(l) = \underline{Z}_L \frac{\underline{Z} + j\underline{Z}_L \tan(\beta l)}{\underline{Z}_L + j\underline{Z} \tan(\beta l)} \Big|_{\tan(\beta l)=0, l=L} = \underline{Z}$$

Ein  $\lambda/2$  Transformator verändert die Impedanzverhältnisse nicht (Identische Transformation der Eingangsgrößen zu den Ausgangsgrößen).

Anmerkung :

$\lambda/4$  und  $\lambda/2$  Transformatoren weisen die beschriebenen Eigenschaften exakt nur für eine bestimmte Frequenz auf.

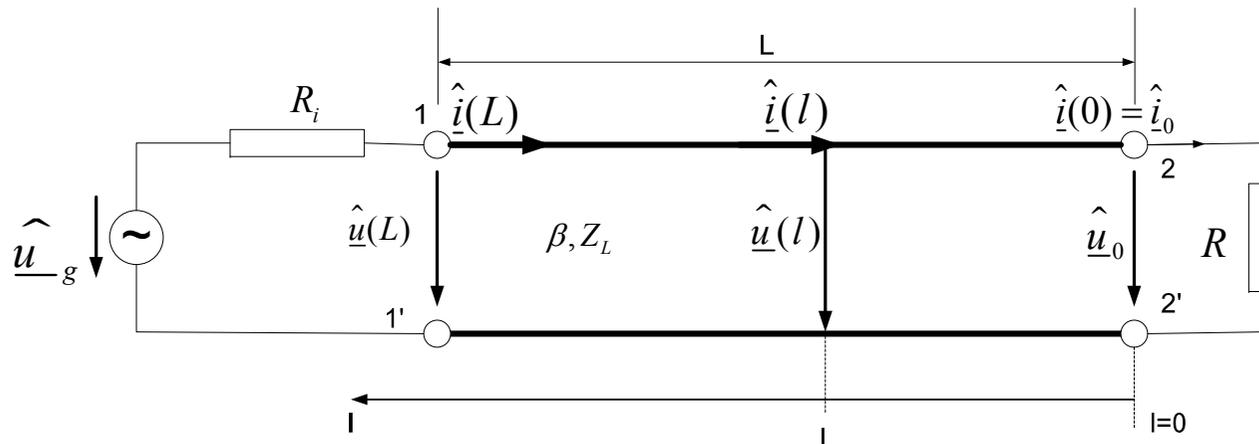
Für eine vorgeschriebene Betriebs-Bandbreite werden mehrere Transformatoren mit abgestuften Wellenwiderstandswerten hintereinander geschaltet.



# 6.4.4 Verlustlose Fernleitungen

Ein Beispiel : Die Spannungsverteilung entlang eines  $\lambda/4$  Transformators ist zu bestimmen.

Folgende Parameter seien bekannt:  $R_i = 25\Omega$ ,  $R = 100\Omega$ ,  $L = \lambda/4$



Lösung :

Der Generator soll angepaßt sein, deshalb gilt  $Z_L = \sqrt{R_i R} = \sqrt{25\Omega \cdot 100\Omega} = 50\Omega$

An der Stelle  $l = 0$  gilt:

$$r_{-0} = \frac{Z - Z_L}{Z + Z_L} = \frac{100\Omega - 50\Omega}{100\Omega + 50\Omega} = \frac{1}{3}$$

## 6.4.4 Verlustlose Fernleitungen

An den Klemmen 1-1' läßt sich angeben (s. Ergebnisse des Sonderfalles 4)

$$\underline{r}(L) = -\underline{r}_0 = -\frac{1}{3} = \frac{\hat{u}_r(L)}{\hat{u}_h(L)}$$

Die Eingangsspannung  $\hat{u}(L)$  beträgt infolge der Anpassung

$$\hat{u}(L) = \frac{\hat{u}_g}{2} = \hat{u}_h(1 + \underline{r}(L)) = \frac{2}{3}\hat{u}_h \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_h = \frac{3}{4}\hat{u}_g$$

$$\text{Wegen } \hat{u}_r + \hat{u}_h = \hat{u}_g/2 \text{ folgt } \hat{u}_r = -\frac{\hat{u}_g}{4}$$

Damit läßt sich die Bestimmungsgleichung für die Spannungswelle entlang des  $\lambda/4$  Transformators auf die folgende Formen bringen: (72a)

$$\hat{u}(l) = \hat{u}_h e^{-j\beta l} e^{j\beta l} + \hat{u}_r e^{j\beta l} e^{-j\beta l} = \frac{3}{4}\hat{u}_g j e^{j\beta l} - \frac{1}{4}\hat{u}_g (-j) e^{-j\beta l} = j\frac{3}{4}\hat{u}_g (e^{j\beta l} + \frac{1}{3}e^{-j\beta l})$$

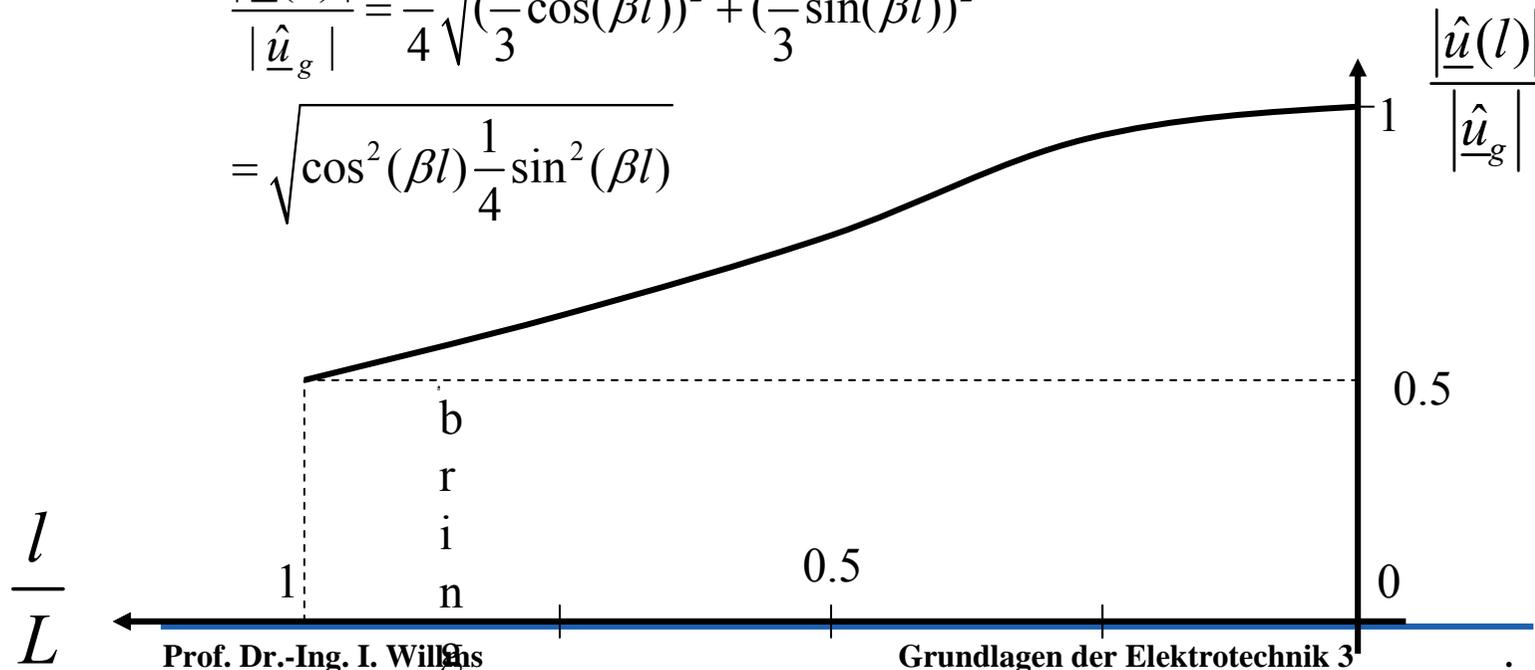


# 6.4.4 Verlustlose Fernleitungen

$$\underline{\hat{u}}(0) = \underline{\hat{u}}_0 = j\underline{\hat{u}}_g$$

Unter Zuhilfenahme der Gl. (72a) lässt sich eine Gleichung zur Bestimmung der Spannungsverteilung entlang der Fernleitung aufstellen:

$$\begin{aligned} \frac{|\underline{\hat{u}}(0)|}{|\underline{\hat{u}}_g|} &= \frac{3}{4} \sqrt{\left(\frac{4}{3} \cos(\beta l)\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \sin(\beta l)\right)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2(\beta l) \frac{1}{4} \sin^2(\beta l)} \end{aligned}$$



# 6.4.4 Verlustlose Fernleitungen

- Infolge der endlich großen Reflektionsfaktoren ( $+1/3$  und  $-1/3$ ) für  $l = 0$  und  $l = L$  ergeben sich daher auf dem  $\lambda/4$ -Transformator reflektierte Wellen!
- Vor und nach diesem kurzen Leitungsstück existiert jedoch Wellenanpassung – ohne Reflektion von Wellen!
- Damit kann ein derartiger Transformator zur Anpassung von Leitungen unterschiedlichen Wellenwiderstands eingesetzt werden.
- Damit wird auch eine Leistungsanpassung erreicht – die Leistung am Eingang des  $\lambda/4$ -Transformator wird ohne Verluste an den Ausgang dieses Leitungsstücks weitergegeben.

