Übungsaufgaben

Grundgebiete der Informationstechnik 2

Version 2.0.1, Datum 30. Oktober 1998

Zur Beachtung:

Diese Unterlage stellt eine Sammlung von Aufgaben zur Übung zur Vorlesung "Grundgebiete zur Informationstechnik 2" dar.

Duisburg, 30. Oktober 1998

Prof. Dr.-Ing. I. Willms

Fachgebiet Nachrichtentechnik

Aufgabe 1:

Entwerfen Sie einen Tschebyscheff-Bandpaß 2.Ordnung mit der Welligkeit 0,5dB und den Grenzfrequenzen $f_{g-} = 800\text{Hz}$, $f_{g+} = 2000\text{Hz}$.

Realisieren Sie diesen als Switched-Capacitor-Filter mit $A_0 = -1$ sowie $f_S = 1\text{MHz}$ und $C_S/C = 0,01$.

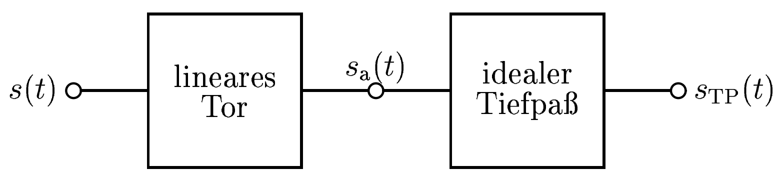
Aufgabe 2:

Gegeben seien die beiden Signale

$$s_1(t) = \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) \qquad s_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

1. Bestimmen Sie die beiden Spektren $S_1(\omega)$ und $S_2(\omega)$.
2. Bestimmen Sie für beide Signale die Spektren $S_\text{a}(\omega)$ der abgetasteten Signale bei Abtastung
   a) mit einem idealen Abtaster ($T_a = 5T$),
   b) mit einem linearen Tor ($T_a = 5T$, $T_0 = T_a/2$).

Aufgabe 3:



Gegeben ist die dargestellte Schaltung und das Signal

$$s(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \text{si}\left(\omega_g t\right)$$

Das lineare Tor besitze die Abtastrate T und die Öffnungszeit $T_0 < T$. Der ideale Tiefpaß besitzt die Übertragungsfunktion

$$H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right)$$

1. Bestimmen Sie für $T = \frac{\pi}{\omega_g}$ die Spektren $S_\text{a}(\omega)$ und $S_{TP}(\omega)$. Zeichnen Sie qualitativ den Frequenzverlauf dieser beiden Spektren im Intervall $-4\omega_g < \omega < 4\omega_g$.
2. Bestimmen Sie für $T = \frac{\pi}{\omega_g}$ das Ausgangssignal $s_{TP}(t)$.
3. Bestimmen Sie für $T = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\omega_g}$ die Spektren $S_\text{a}(\omega)$ und $S_{TP}(\omega)$. Zeichnen Sie qualitativ den Frequenzverlauf dieser beiden Spektren im Intervall $-4\omega_g < \omega < 4\omega_g$.
4. Bestimmen Sie für $T = \frac{4}{3}\frac{\pi}{\omega_g}$ das Ausgangssignal $s_{TP}(t)$.

Aufgabe 4:

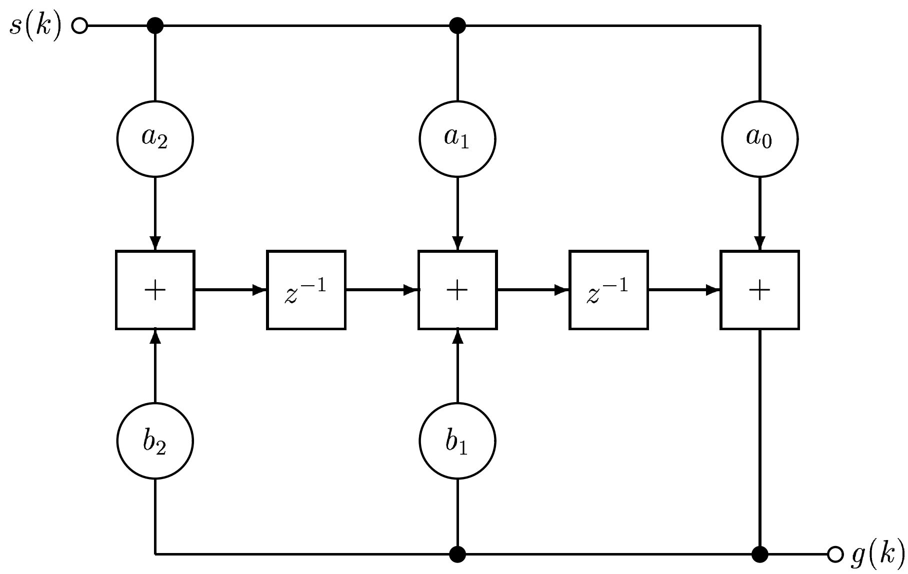
Gegeben ist die Differenzengleichung

$$x(k+1) + c_0 x(k) = s(k)$$

mit $x(0) = 0$ und $s(k) = u_0, k \geq 0$.

1. Berechnen Sie die Lösung $x(k)$ der Differenzengleichung.
2. Zeichnen Sie das Strukturbild der Differenzengleichung.

Aufgabe 5:



Gegeben ist das abgebildete Strukturbild eines zeitdiskreten Systems.

1. Stellen Sie die Differenzengleichung auf.
2. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H_Z(z)$.

Aufgabe 6:

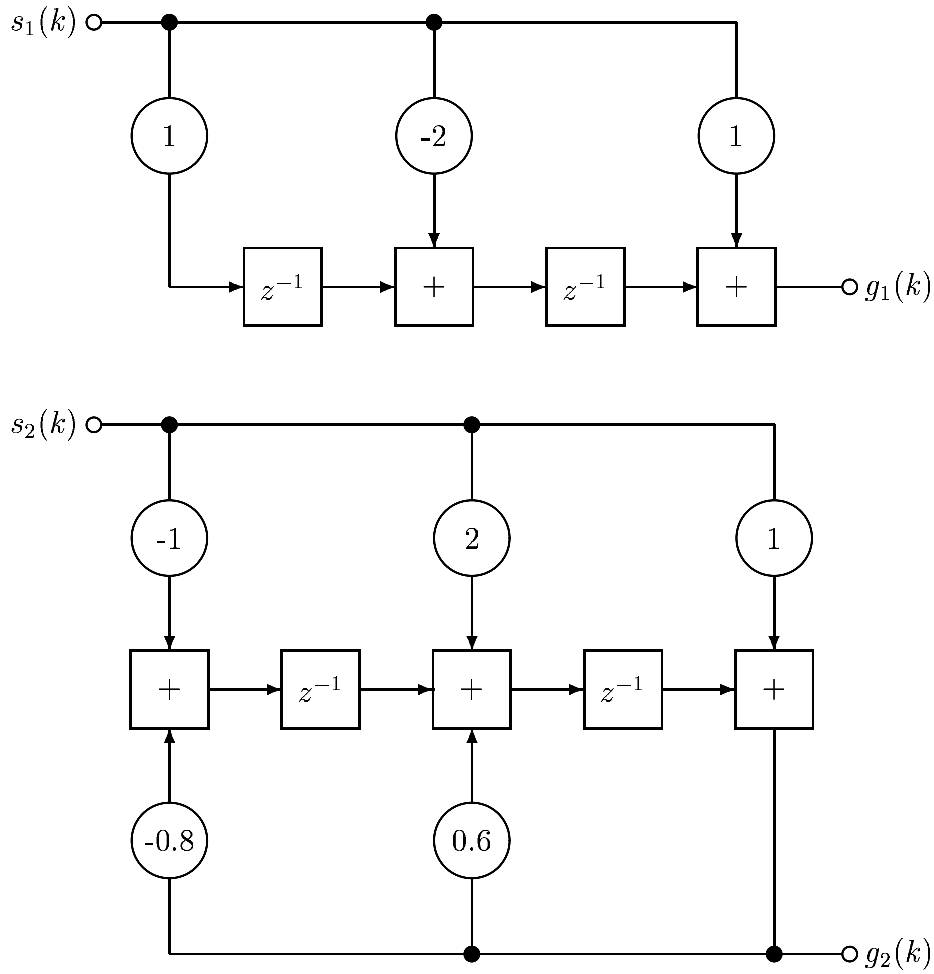
Gegeben ist die Differenzengleichung

$$5s(k-1) + 2s(k-2) = 2g(k) + 16g(k-1) + 50g(k-2)$$

1. Geben Sie die Übertragungsfunktion $H_Z(z)$ des Systems an.
2. Berechnen Sie die Pole und Nullstellen des Systems.
3. Zeichnen Sie das Strukturbild.

Aufgabe 7:

Gegeben sind die beiden abgebildeten Systeme



1. Bestimmen Sie die Differenzengleichung und die Übertragungsfunktion der beiden Systeme.
2. Bestimmen Sie die ersten 20 Werte der Impulsantwort für beide Systeme.
3. Bestimmen Sie die resultierende Übertragungsfunktion bei
   (a) Serienschaltung,
   (b) Parallelschaltung

   der beiden Systeme.

Aufgabe 8:

Ein digitales Filter bildet den arithmetischen Mittelwert aus den beiden letzten Abtastwerten des Eingangssignals.

1. Stellen Sie die Differenzengleichung des Filters auf und geben Sie die Übertragungsfunktion $H_Z(z)$ und die Impulsantwort $h(k)$ an.
2. Bestimmen Sie den Amplitudengang $|H(\omega)|$ und stellen Sie diesen unter Angabe aller erforderlicher Werte graphisch dar.
3. Führen Sie die gleichen Betrachtungen für das allgemeine Mittelwertfilter mit der Differenzengleichung
$$g(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} s(k-i)$$
durch.

Aufgabe 9:

Die Übertragungsfunktion eines digitalen Filters besitze eine reelle Polstelle $z_{\infty 1} = 0.8$, zwei komplexe Polstellen $z_{\infty 2,3} = 0.5 \pm j0.5$ sowie die beiden Nullstellen $z_{01} = -1$ und $z_{02} = -0.5$. Weiterhin gelte $H_Z(0) = 1.25$.

1. Zeichnen Sie das Pol-Nulstellen Diagramm und stellen Sie die Übertragungsfunktion $H_Z(z)$ auf.
2. Bestimmen Sie die Differenzengleichung des Filters und die ersten 20 Werte der Impulsantwort $h(k)$.
3. Bestimmen Sie den Amplitudengang $|H(\omega)|$ des Filters.

Aufgabe 10:

Gegeben ist ein digitales Filter mit der Differenzengleichung

$$g(k) = s(k-1) - \frac{1}{2} g(k-1)$$

Berechnen Sie die Impulsantwort $h(k)$

1. durch inverse Z-Transformation der Übertragungsfunktion $H_Z(z)$
2. durch Einsetzen des Einheitsimpulses $\delta(k)$ in die Differenzengleichung

Aufgabe 11:

Gegeben ist die Differenzengleichung eines digitalen Filters

$$\begin{aligned} g(k) &= s(k) + 2.8s(k-1) + 3.92s(k-2) + 2.8s(k-3) + s(k-4) \\ &\quad +3g(k-1) - 3.62g(k-2) + 2.062g(k-3) - 0.4745g(k-4) \end{aligned}$$

Geben Sie die vier kanonischen Filterstrukturen des Filters und die jeweilige Form der Übertragungsfunktion $H_Z(z)$ an.

Hinweis: ein Pol der Übertragungsfunktion $H_z(z)$ liegt bei $z = 0.8 + j0.3$ und eine Nullstelle bei $z = -0.8 + j0.6$.

Aufgabe 12:

Entwerfen Sie einen digitalen Tiefpass mit der Grenzfrequenz $\frac{\omega_g}{\omega_a} = 0.2$ durch Fourier-Approximation eines idealen Tiefpasses. Die Filterordnung sei $N = 20$.

Verwenden Sie die folgenden Fensterfunktionen bei der Approximation

$$\text{Rechteck:} \quad w(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, \ldots, N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Bartlett:} \quad w(k) = 1 - 2\frac{|k - N/2|}{N}$$

$$\text{Hanning:} \quad w(k) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right)$$

$$\text{Hamming:} \quad w(k) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$\text{Blackman:} \quad w(k) = 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi}{N}k\right)$$

$$\text{Kaiser:} \quad w(k) = \frac{\mathrm{I}_0\left(\alpha\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2}{N}k\right)^2}\right)}{\mathrm{I}_0(\alpha)} \qquad 4 \leq \alpha \leq 9$$

$$\mathrm{I}_0(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{(x/2)^i}{i!}\right]^2$$

$\mathrm{I}_0(x)$ ist die modifizierte Besselfunktion erster Art nullter Ordnung.

1. Skizzieren Sie die Fensterfunktionen für die gegebene Filterordnung mit allen erforderlichen Werten.
2. Bestimmen Sie die Impulsantworten und Frequenzgänge des Tiefpasses für die verschiedenen Fensterfunktionen.

Aufgabe 13:

Zeigen Sie, daß für Phasen- und Gruppenlaufzeit eines zeitdiskreten Systems mit der Übertragungsfunktion

$$H_Z(z) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i z^{-i}}{1 + \sum\limits_{i=n}^{n} b_i z^{-i}} = \frac{a_m}{b_n} \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} (z - z_{0i})}{\prod\limits_{i=1}^{n} (z - z_{\infty i})}$$

mit

$$z_{0i} = |z_{0i}| \mathrm{e}^{j\varphi_{0i}}, i = 1, \ldots, m \text{ und } z_{\infty i} = |z_{\infty i}| \mathrm{e}^{j\varphi_{\infty i}}, i = 1, \ldots, n$$

die folgenden Beziehungen für Phasenlaufzeit τ_p und Gruppenlaufzeit τ_g gelten.

$$\tau_p = \frac{1}{\omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \arctan \frac{\sin(\omega T_a) - |z_{\infty i}| \sin \varphi_{\infty i}}{\cos(\omega T_a) - |z_{\infty i}| \cos \varphi_{\infty i}} - \sum_{i=1}^{m} \arctan \frac{\sin(\omega T_a) - |z_{0i}| \sin \varphi_{0i}}{\cos(\omega T_a) - |z_{0i}| \cos \varphi_{0i}} \right)$$

$$\tau_g = T_a \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1 - |z_{\infty i}| \cos(\omega T_a - \varphi_{\infty i})}{1 - 2|z_{\infty i}| \cos(\omega T_a - \varphi_{\infty i}) + |z_{\infty i}|^2} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1 - |z_{0i}| \cos(\omega T_a - \varphi_{0i})}{1 - 2|z_{0i}| \cos(\omega T_a - \varphi_{0i}) + |z_{0i}|^2} \right)$$

Aufgabe 14:

Zeigen Sie, daß ein FIR-Filter mit symmetrischer oder antisymmetrischer Impulsantwort einen linearen Phasenverlauf hat. Welche Bedingung folgt aus der linearen Phase für die Lage der Nullstellen des Filters? (Zeigen Sie, daß die Nullstellen von FIR-Filtern mit linearer Phase spiegelbildlich zum Einheitskreis der z-Ebene liegen.)

Aufgabe 15:

Bestimmen Sie mit der bilinearen Transformation die vier elementaren Filterypen Tiefpaß, Hochpaß, Bandpaß und Bandsperre 2. Ordnung. Verwenden Sie für Tief- und Hochpaß eine Tschebyscheff-Charakteristik mit 0,5dB Welligkeit. Die Güte des Bandpasses und der Bandsperre sei $Q = 10$. Für die Grenz- und Resonanzfrequenzen der digitalen Filter gilt

$$\frac{\omega_g}{\omega_a} = \frac{\omega_r}{\omega_a} = 0.2$$

Weiterhin sei $A_0 = A_\infty = A_r = 1$.

Aufgabe 16:

x_1	x_2	z_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Geben Sie für das in der Tabelle dargestellte XOR-Problem eine Lösung mit einem Backpropagation-Netzwerk mit 2 verdeckten Neuronen an. Die Transferfunktion sei

$$t(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-gx}}$$

Aufgabe 17:

Führen Sie für das XOR-Problem aus Aufgabe 16 die beiden ersten Lernschritte des Gradientenabstieg-Lernverfahrens mit der Schrittweite $\eta = 1.0$ durch. Bei $t = 0$ liege das Muster $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ am Netzwerk, und bei $t = 1$ gelte $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$.

Für die Startwerte der Gewichtungsfaktoren des Netzwerks gelte:
$w_{10}^{I} = 0.5, w_{11}^{I} = -0.5, w_{12}^{I} = 0.5,$
$w_{20}^{I} = -0.5, w_{21}^{I} = 0.5, w_{22}^{I} = -0.5,$
$w_{10}^{II} = -0.5, w_{11}^{II} = 0.5, w_{12}^{II} = -0.5$

Aufgabe 18:

Zeigen Sie für beiden Transferfuntionen

$$t_1(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}} \qquad t_2(x) = \tanh(\mathrm{x})$$

daß sich ihre Ableitungen $t_1'(x)$ und $t_2'(x)$ nach

$$t_1'(x) = t_1(x)(1 - t_1(x)) \qquad t_2'(x) = 1 - t_2^2(x)$$

berechnen lassen.

Aufgabe 19:

Zeigen Sie, daß die Gewichtsänderungen in der verdeckten Schicht eines zweischichtigen Backpropagation-Netzwerks nach der Vorschrift

$$\Delta w_{ji}^{I} = \eta t'\left(p_j^{I}\right) x_i \sum_{k=1}^{K} \left[(z_k - y_k) t'\left(p_k^{II}\right) w_{kj}^{II}\right]$$

durchzuführen sind.

Die Bezeichnung der Symbole ist wie folgt:

y_k	Ausgangswerte des Netzwerks
z_k	vorgegebene Werte
x_i	Eingangswerte
w_{ji}^{I}	Gewichtungsfaktoren Schicht I (verdeckte Schicht)
w_{kj}^{II}	die Gewichtungsfaktoren Schicht II (Ausgangs-Schicht)
p_j^{I}	Summierer-Ausgangssignale Schicht I
p_k^{II}	Summierer-Ausgangssignale Schicht II
t	Transferfunktion
η	Lernrate

Aufgabe 20:

Ein amplitudenmoduliertes Signal der Form

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{T}\right)^2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

gelangt an den Eingang eines Filters mit der Übertragungsfunktion

$$H(\omega) = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

Berechnen Sie das Signal $y(t)$ am Filterausgang.

Hinweis: Benutzen Sie bei der Rechnung das ESB-Signal $x_{EM}(t)$.

Aufgabe 21:

Zeigen Sie, daß der ideale Modulator mit der Modulatorzeitfunktion

$$m(t) = \mathrm{e}^{j\omega_0 t}$$

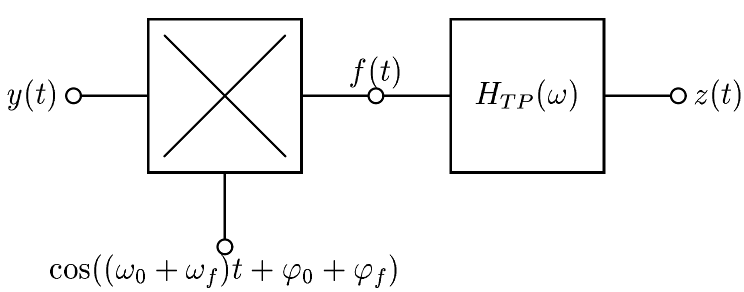
ein lineares, zeitabhängiges System ist.

Aufgabe 22:

Ein mit dem Signal $s(t)$ der Bandbreite $\omega_g < \omega_0$ moduliertes Bandpaßsignal

$$y(t) = S_{00} s(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

soll wie folgt demoduliert werden.



$$H_{TP}(\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

Der Demodulator besitzt einen Frequenzfehler ω_f und einen Phasenfehler φ_f.

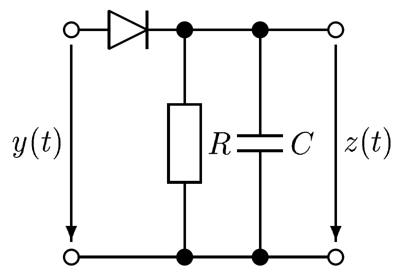
Wie groß darf der Frequenzfehler und der Phasenfehler sein, damit das Signal $z(t)$ zu jeder Zeit zumindest die Hälfte des Wertes bei optimalem Empfang hat?

Aufgabe 23:

Das amplitudenmodulierte Signal

$$y(t) = S_{00}\,(1 + m\cos(\omega_1 t))\cos(\omega_0 t)$$

mit $0 < m < 1$ und $\omega_1 \ll \omega_0$ soll mit einem idealen Einweggleichrichter mit Tiefpaß empfangen werden.



Geben Sie eine qualitative grafische Darstellung des Ausgangssignals $z(t)$ für die beiden Fälle

$$RC \gg \frac{1}{\omega_0} \qquad \text{und} \qquad RC \ll \frac{1}{\omega_0}$$

an.

Aufgabe 24:

Ein Binärsignalfolge a_n mit $a_n \in [0, 1]$ soll mit dem Trägersignal

$$s(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

übertragen werden. Für das modulierte Sendesignal $m(t)$ gelte

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n s(t - nT)$$

Für a_n gelte $a_n = 0$ für $n < 0$ und $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ und $a_4 = 0$.

1. Skizzieren Sie das Signal $m(t)$ für $0 \le t \le 5T$.
2. Geben Sie das Demodulationsfilter für den Empfang der Binärsignalfolge an.
3. Skizzieren Sie das Ausgangssignal $g(t)$ des Korrelationsempfängers im Demodulationsfilter für $0 \le t \le 5T$ und geben Sie die Werte des Ausgangssignals $g(nT)$ für $n = 1, \ldots, 5$ an.

Aufgabe 25:

Die Binärsignalfolge a_n aus Aufgabe 24 werde mit 2 Trägersignalen $s_0(t)$ und $s_1(t)$ übertragen, wobei $s_0(t)$ für $a_n = 0$ gesendet wird und $s_1(t)$ für $a_n = 1$. Für die beiden Trägersignale gilt

$$
\begin{aligned}
s_0(t) &= \operatorname{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \\
s_1(t) &= \operatorname{rect}\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right) - \operatorname{rect}\left(\frac{t - 3T/4}{T/2}\right)
\end{aligned}
$$

1. Geben Sie das modulierte Sendesignal $m(t)$ an und skizzieren Sie es für $0 \leq t \leq 5T$.
2. Geben Sie das Demodulationsfilter für den Empfang der Binärsignalfolge an.
3. Skizzieren Sie die Ausgangssignale $g_0(t)$ und $g_1(t)$ der Korrelationsempfänger im Demodulationsfilter für $0 \leq t \leq 5T$ und geben Sie die Werte der Ausgangssignale $g_0(nT)$ und $g_1(nT)$ für $n = 1, \ldots, 5$ an.

Aufgabe 26:

Als Trägersignal für eine Binärsignalübertragung werde das Signal

$$
s(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \sin(2\pi f_0 t) \qquad f_0 = \frac{5}{T}
$$

verwendet.

1. Skizzieren Sie das Signal $s(t)$.
2. Bestimmen Sie das Ausgangssignal $g(t)$ des zum Signal $s(t)$ gehörigen Korrelationsempfängers.