Faltungssätze

1. Werden **zwei rect-Funktionen miteinander gefaltet**, so ist das Ergebnis immer ein Trapez (wenn die beiden rect's unterschiedlich breit sind) oder ein Dreieck (wenn die beiden rect's gleich breit sind.)
   Der Wert des Maximums dieses Trapezes oder Dreiecks läßt sich leicht berechnen, aus $a \cdot b \cdot x_s$, wobei a, b die "Höhen" der beiden rect-Funktionen sind und x_s die "Breite" der schmaleren der beiden rect-Funktionen ist.

   Die Anfangs- und Endpunkte des Faltungsergebnisses ergeben sich aus den unten folgenden Sätzen, die hier für die Faltung zweier Zeitfunktionen $x(t)$ und $y(t)$ formuliert sind und natürlich entsprechend für Frequenzfunktionen gilt, bei denen dann t durch ω zu ersetzen ist.
2. Die **Faltung einer rect-Funktion mit einer treppenförmigen Funktion** (stückweise konstanten Funktion) führt immer auf einen Polygonzug (einer aus Geradenstücken bestehenden Funktion).
3. Die **Faltung einer rect-Funktion mit einem beliebigen Polygonzug** (einer aus Geradenstücken bestehenden Funktion) führt immer zu einer Funktion, die sich aus Konstanten- und/oder Geraden- und/oder Parabelstücken zusammensetzen läßt, je nachdem ob der Polygonzug Bereiche aufweist in denen er $\equiv 0$ oder konstant ist oder nur Steigungen $\neq 0$ aufweist.
4. Bei der **Faltung zweier zeitbegrenzter Funktionen** $x(t),\ y(t)$, für die gilt:
   $x(t) \neq 0\ \ \forall t \in [t_{x_1},\ t_{x_2}];\ \ x(t) \equiv 0$ sonst und
   $y(t) \neq 0\ \ \forall t \in [t_{y_1},\ t_{y_2}];\ \ y(t) \equiv 0$ sonst
   ist die resultierende Funktion $z(t) = x(t) * y(t)$ zeitbegrenzt und es gilt:
   $z(t) \neq 0\ \ \forall t \in]t_{x_1} + t_{y_1},\ t_{x_2} + t_{y_2}[;\ \ z(t) \equiv 0$ sonst
   D.h:
   der "Anfangspunkt" t_{z_1} von $z(t)$ liegt bei der Summe der "Anfangspunkte" $t_{x_1} + t_{y_1}$.
   der "Endpunkt" t_{z_2} von $z(t)$ liegt bei der Summe der "Endpunkte" $t_{x_2} + t_{y_2}$.
   Die "Breite" von $z(t)$ ergibt sich aus der Summe der "Breiten" von $x(t)$ und $y(t)$. Die Werte von $z(t)$ am Anfangs- und Endpunkt sind 0, wenn $x(t),\ y(t)\ < \infty\ \forall t$.
5. Bei der **Faltung zweier symmetrischer Funktionen** $x(t),\ y(t)$, deren Symmetriepunkte bei $t_{xS},\ t_{yS}$ liegen, gilt:
   die resultierende Funktion $z(t) = x(t) * y(t)$ ist ebenfalls symmetrisch zum Symmetriepunkt $t_{zS} = t_{xS} + t_{yS}$.
6. Sind beide Funktionen entweder gerade oder beide ungerade bezüglich ihrer Symmetriepunkte t_{xS} bzw. t_{yS}, so ist das Faltungsergebnis **gerade** bezüglich ihres Symmetriepunktes $t_{zS} = t_{xS} + t_{yS}$.
7. Ist eine der Fubktionen gerade und die andere Funktion ungerade bezüglich ihres Symmetriepunkts t_{xS} bzw. t_{yS}, so ist das Faltungsergebnis **ungerade** bezüglich ihres Symmetriepunktes $t_{zS} = t_{xS} + t_{yS}$.

   Diese Symmetriesätze 5,6 und 7 vereinfachen die Ermittlung der Faltungsoperationen für symmetrische Funktionen insofern, dass nur eine Hälfte des Faltungsproduktes errechnet werden muss. Die zweite Hälfte ergibt sich aus den Symmetrieeigenschaften.

8. Aus den o.a. Sätzen folgt natürlich auch, dass die **Faltung zweier "kausaler Funktionen"** (Funktionen, die für $t < 0 \ \equiv 0$ sind) wieder eine kausale Funktion ergibt.
9. Die Faltung einer Funktion mit ihrer gespiegelten Version $g(t) = x(t) * x(-t)$ ist immer eine **gerade Funktion** mit dem Maximum im Symmetriepunkt 0.
10. Die **Faltung eines Dirac-Impulses** $\delta(t - t_0)$ **mit einer beliebigen anderen Funktion** $h(t)$ bewirkt eine Verschiebung des Nullpunktes $h(0)$ dieser Funktion an die Stelle, an der der Dirac-Impuls steht; also an die Stelle t_0.

    Also gilt: $\delta(t - t_0) * h(t) = h(t - t_0)$.

    Entsprechendes gilt für die Faltung zweier Dirac-Impulse:

    $$\delta(t - t_0) * \delta(t - t_1) = \delta(t - (t_0 + t_1)) = \delta(t - t_0 - t_1).$$