

Seminar "Grundlagen der Nachrichtentechnik 2"

Seminarversuch 3 "Matched Filter"

Fachgebiet: Nachrichtentechnische Systeme

Name:

Matrikel-Nr.:

Betreuer:

Datum:



Die Vorbereitungsaufgaben sind vor dem Seminartermin zu lösen !

1. Das "matched filter"

SemNT2U3.doc
Stand: 14.05.04

1.1 Einleitung

Untersucht man die Verfahren zur Übertragung von Nachrichten, die im vorvorigen Jahrhundert zu Beginn der stürmischen Aufwärtsentwicklung der Nachrichtentechnik verwendet wurden, so stellt man folgendes fest:

Am Anfang wurden vor allem digitale Verfahren zur Übermittlung alphanumerischer Texte (Morse-Telegraphie) eingesetzt.

Ausgelöst durch die Erfindung der verstärkenden Elektronenröhre zu Beginn des letzten Jahrhunderts wurden diese Telegraphieverfahren dann durch Verfahren der analogen Ton- und Bildübertragung ergänzt. In Bezug auf das gesamte Nachrichtenaufkommen dominierten sogar bis etwa zu den 50er Jahren die analogen Übertragungstechniken. Danach erfolgte mit der Erfindung der Transistoren und der integrierten Schaltkreise und der damit verknüpften Entwicklung der Repräsentation analoger Signale durch digitalisierte Abtastwerte (Abtastung, Analog-Digital-Konversion) wiederum ein stärkerer Zuwachs auf der Seite der Systeme zur Übertragung binärer Daten.

Die Vorteile der Binär-Daten-Übertragung, bei der im einfachsten Fall dem Bit-Wert "logisch 1" das "Senden des Trägersignals $s(t)$ ", dem Bit-Wert "logisch 0" das "Nicht-Senden des Trägersignals $s(t)$ " zugeordnet wird, haben inzwischen zu einer Reihe digital ausgerichteter Kommunikationsnetze geführt.

Bei der Übertragung eines Bit-Wert tragenden Nutzsignals $s(t)$ überlagert innerhalb einer Übertragungsstrecke, auch "Übertragungskanal" genannt, in der Regel ein nicht erwünschtes, mehr oder weniger stark störendes Rauschsignal $n(t)$ additiv das nachrichtentragende Nutzsignal $s(t)$. Dies bedeutet, dass am Ausgang des Übertragungskanals das aus dem Trägersignal $s(t)$ und dem Rauschsignal $n(t)$ zusammengesetzte Signalgemisch $x(t)$ mit

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (1)$$

beobachtet wird.

Bei wachsenden Rauschsignalen $n(t)$ ist daher auf der Empfangsseite die Entdeckung des Nutz-Signals $s(t)$ zunehmend schwierig und damit die Entscheidung, ob der Bit-Wert "logisch 1" oder "logisch 0" übertragen wurde, zunehmend fehlerbehaftet. Dieses führt dazu, dass bei der auf $s(t)$ basierenden Übertragung einer Serie von Bits über einen gestörten Übertragungskanal auf der Empfangsseite nicht alle Bit-Werte fehlerfrei zurückgewonnen werden können.

Üblicherweise charakterisiert das Verhältnis der Zahl n_e der fehlerhaften Bit-Werte zur Gesamtzahl n aller übertragenen Bit-Werte einer Bit-Serie, die sogenannte "Bit-Fehler-Rate", die Güte des gestörten Übertragungskanals. Hierauf wird weiter unten noch genauer eingegangen.

Zur Reduzierung der Zahl derartiger Übertragungsfehler setzt man auf der Empfangsseite häufig lineare zeitinvariante Filter (LZI-Filter-Systeme) ein, die sowohl auf das empfangene Nutzsignal $s(t)$ als auch auf das Störsignal $n(t)$ speziell angepaßt sind.

Und zwar wählt man die Stossantwort $h(t)$ der LZI-Filter so aus, daß der zu einem bestimmten, d.h. vorher festgelegten Abtast-Zeitpunkt T abgetastete Wert $y(T)$ der Filter-Reaktion $y(t)$ auf ein vorgegebenes Eingang-Nutzsignal $s(t)$ möglichst gross ist und dass gleichzeitig der Effektivwert $n_{a\text{eff}}$ der Filter-Reaktion $n_a(t)$ auf das Eingang-Störsignal $n(t)$ einen möglichst kleinen Wert zeigt.

Die Strategie zur Rückgewinnung der Binär-Daten besteht also nicht darin, das Eingang-Signal $s(t)$ vom Rauschen zu befreien und dadurch die Binär-Daten mit geringerer Fehlerzahl zurückzugewinnen, sondern die Strategie ist darauf ausgerichtet, auf der Basis eines optimierten Verhältnisses $y(T) / n_{a\text{eff}}$ zu entdecken bzw. zu entscheiden,

- ob das Träger-Signal $s(t)$ gesendet und daher eine "logische 1" übertragen wurde oder
- ob das Träger-Signal $s(t)$ nicht gesendet und daher eine "logische 0" übertragen wurde.

Die Wirkungsweise und die Eigenschaften derart funktionierender Empfangsfilter, der sogenannten "matched filter" (engl.: to match: anpassen), werden im Folgenden vorgestellt.

1.2 Herleitung der Eigenschaften des matched-filter

Bei einem ersten Ansatz zur Herleitung der Eigenschaften des matched filter wird von dem in Abb. 1 dargestellten Übertragungssystem ausgegangen.

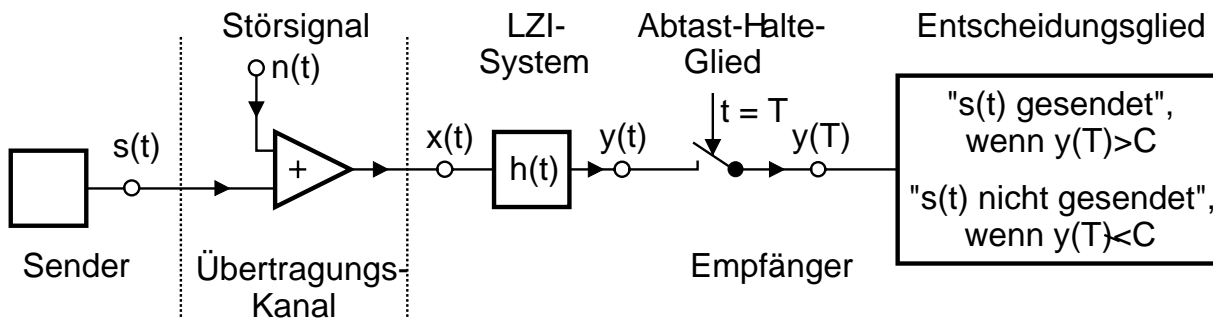


Abb. 1: Übertragungssystem

Wie man der Abbildung entnehmen kann, ist das Übertragungssystem aufgebaut

- aus einem Sender, an dessen Ausgang z.B. das Energiesignal $s(t)$ ("Trägersignal") beobachtet wird,
- aus einem analogen Addierer, der als einfaches Modell einen gestörten, verzerrungsfreien Übertragungskanal beschreibt und an dessen Ausgang das Signal $x(t) = s(t) + n(t)$, d.h. eine additive Überlagerung von $s(t)$ und Störsignal $n(t)$, erscheint, und
- aus einem Empfänger, bestehend aus einem linearen, zeitinvarianten Filter (LZI-System) mit der kausalen Stoßantwort $h(t)$, einem Abtast-Halte-Glied, das das Signal $y(t)$ zu einem festgelegten Zeitpunkt $t=T$ abtastet und den Wert $y(T)$ hält, und einem Entscheidungsglied.

Bei Erregung des Empfänger-LZI-Systems durch das am Systemeingang liegende Signal $x(t)$ lautet die Systemreaktion $y(t)$, die durch das Faltungsprodukt von $x(t)$ und $h(t)$ beschrieben wird:

$$y(t) = x(t) * h(t) = [s(t) + n(t)] * h(t) = [s(t) * h(t)] + [n(t) * h(t)] \quad (2)$$

Ausgedrückt durch den Nutzsignalanteil

$$g(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3)$$

und den Störsignalanteil

$$n_a(t) = n(t) * h(t) \quad (4)$$

gilt für das Ausgangssignal $y(t)$ des LZI-Systems

$$y(t) = g(t) + n_a(t) \quad (5)$$

Dementsprechend setzt sich der am Ausgang des Abtast-Halte-Gliedes des Empfängers zum Abtastzeitpunkt T auftretende Abtast-Wert $y(T)$ aus dem determinierten Nutzsignal-Anteil $g(T)$ und aus dem zufälligen Rauschanteil $n_a(T)$ zusammen. Es gilt

$$y(T) = g(T) + n_a(T) \quad (6)$$

Die Grösse $n_a(T)$ stellt eine Zufallsgröße (Zufallsvariable) dar, deren Amplituden- oder Wertebereich mit dem Amplitudenbereich des Rausch-Signals $n_a(t)$ übereinstimmt. Dies bedeutet, daß die am Filter-Ausgang zum Zeitpunkt T auftretende Grösse $n_a(T)$ zufällige, aus dem Amplitudenbereich von $n_a(t)$ stammende Werte annehmen kann.

Von der dritten Stufe des Empfängers, dem Entscheidungsglied, wird überprüft, ob der bei der Abtastung gewonnene Wert $y(T)$ größer oder aber kleiner/gleich als ein geeignet ausgewählter und damit vorgegebener konstanter Schwellenwert C ist.

Gilt unter der Bedingung $g(T) > 0$ für den Abtastwert $y(T)$ die Beziehung $y(T) > C$, entscheidet das Entscheidungsglied "Signal $s(t)$ wurde gesendet" und gibt dabei für das zugeordnete Bit den Wert "Logisch 1" aus.

Tritt jedoch am Ausgang des Abtast-Halte-Glieds der Wert $y(T)$ mit $y(T) \leq C$ auf, fällt die Entscheidung "Signal $s(t)$ wurde nicht gesendet" und der Bit-Wert "Logisch 0" wird ausgegeben.

Bei zu großen Rausch-Amplituden muß man folglich damit rechnen, daß vom Entscheidungsglied bei einer fest vorgegebenen Entscheidungsschwelle C Fehlentscheidungen getroffen werden. Und zwar unterscheidet man die folgenden 2 Fälle:

Fehler-Fall a: Signal $s(t)$ wurde gesendet, $n_a(T)$ weist aber einen solchen Wert auf, daß

$$y(T) = g(T) + n_a(T) \leq C \quad (7)$$

Das Entscheidungsglied entscheidet demnach "Signal $s(t)$ wurde nicht gesendet" bzw. "Bit-Wert Logisch 0", obwohl $s(t)$ gesendet wurde.

Fehler-Fall b: Signal $s(t)$ wurde nicht gesendet, $n_a(T)$ weist aber einen solchen Wert auf, daß

$$y(T) = n_a(T) > C \quad (8)$$

Das Entscheidungsglied entscheidet demnach "Signal $s(t)$ wurde gesendet" bzw. "Bit-Wert Logisch 1", obwohl $s(t)$ nicht gesendet wurde.

Will man bei wiederholtem Aussenden des Signals $s(t)$ die Anzahl derartiger Fehlentscheidungen möglichst gering halten, muß die Stoßantwort $h(t)$ des LZI-Systems so gewählt werden, daß bei vorgegebenem Signal $s(t)$ und bei vorliegendem Rauschsignal $n(t)$ der Wert $g(T)$ möglichst groß gegenüber allen möglichen Zufallswerten $n_a(T)$ ist.

Nun ist aber eine mathematisch sichere Abschätzung darüber, ob zum Abtastzeitpunkt $g(T)$ groß gegenüber $n_a(T)$ ist, wegen des Zufallscharakters des am Ausgang des LZI-Systems auftretenden Rauschsignals $n_a(t)$ nicht möglich.

Man bezieht daher den Nutzsinal-Abtastwert $g(T)$ auf den Effektivwert

$$n_{a\text{eff}} = \sqrt{\lim_{T_m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n_a^2(t) dt \right)} \quad (9)$$

des Störanteils $n_a(t)$, bildet also das Verhältnis

$$q = \frac{g(T)}{n_{a\text{eff}}} \quad (10)$$

und sucht jetzt diejenige Stoßantwort $h(t)$, bei der bei vorgegebenem Signal $s(t)$ und vorgegebenem Störsignal $n(t)$ das Verhältnis q bzw. sein quadrierter Wert

$$q^2 = \frac{g^2(T)}{n_{a\text{eff}}^2} \quad (11)$$

maximal wird.

Definiert man die "Nutzsignal-Augenblicksleistung S_a " des Augenblickswertes $g(T)$ durch die Gleichung

$$S_a = g^2(T) \quad (12)$$

und die "mittlere Leistung N_a " des am Filter-System-Ausgang auftretenden Rauschsignals $n_a(t)$ mittels

$$N_a = n_{a\text{eff}}^2 = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n_a^2(t) dt \right) \quad (13)$$

kann man die Optimierungsaufgabe auch folgendermaßen formulieren:

Die Stoßantwort $h(t)$ des LZI-Filter-Systems ist so zu bestimmen, daß das am Ausgang des Filter-Systems auftretende, sogenannte "Signal-Rauschleistungsverhältnis"

$$q^2 = \frac{g^2(T)}{n_{a\text{eff}}^2} = \frac{S_a}{N_a} = \frac{g^2(T)}{N_a} \quad (14)$$

maximal wird.

Bevor dieses Signal-Rauschleistungsverhältnis näher untersucht wird, sollen einige für diese Untersuchung wichtige Kenngrößen des Trägersignals $s(t)$, der Filter-Stossantwort $h(t)$, des am Eingang des Filter-Systems liegenden Rauschsignals $n(t)$ sowie des am Ausgang des Filter-Systems auftretenden Rauschsignals $n_a(t)$ kurz erläutert werden.

Dabei wird der Einfachheit halber hier vorausgesetzt, dass

- das reale Rauschsignal $n(t)$ eine Musterfunktion eines ergodischen Rauschprozesses darstellt,
- sein zeitlicher Mittelwert $\overline{n(t)}$ entsprechend der Gleichung

$$\overline{n(t)} = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n(t) dt \right) = 0 \quad (15)$$

den Wert Null aufweist und

- seine Amplitudendichte-Charakteristik $p_N(n)$ einer Gauss-Funktion entspricht ("gauss'sches Rauschsignal").

Ferner wird für alle nachfolgenden Betrachtungen festgelegt, dass die Fourier-Transformation und die inverse Fourier-Transformation **nicht** auf der Basis der Kreisfrequenz ω formuliert wird, sondern auf der Basis der technischen Frequenz f , die durch die Einheit "Hz" charakterisiert ist.

Die auf der technischen Frequenz f basierenden Transformationsgleichungen erhält man, wenn man in den ω -basierten Transformationsgleichungen

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (16)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (17)$$

die Variable ω konsequent entsprechend $\omega = 2\pi f$ durch $2\pi f$ ersetzt und die dabei entstehende Funktion $S(2\pi f)$ gemäß $S_f(f) = S(2\pi f)$ als f -basierte Fourier-Transformierte $S_f(f)$ des reellwertigen Signals $s(t)$ einführt. Als Symbol für die f -basierte Fourier-

Transformation wird im weiteren Text das Zeichen $\circ \overset{f}{\rule{0.5cm}{0.4pt}} \bullet$ verwendet.

Entsprechend wird die f-basierte Fourier-Transformation durch die folgenden zwei Gleichungen beschrieben:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(f) \cdot e^{j2\pi f t} df \quad (18)$$



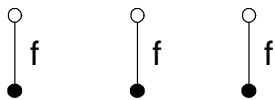
$$S_f(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \quad (19)$$

Zusätzlich wird davon ausgegangen, dass das vorgegebene Träger-Signal $s(t)$ mit der Fourier-Transformierten

$$S_f(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \quad (20)$$

ein reellwertiges Energie-Signal darstellt, dessen Autokorrelationsfunktion $\varphi_{SS}(\tau)$ und Energiedichte-Spektrum $\phi_{fES}(f)$, auch "spektrale Energiedichte" genannt, über die Fourier-Transformation miteinander verknüpft sind:

$$\varphi_{SS}(\tau) = s(-\tau) * s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot s(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{fES}(f) e^{j2\pi f \tau} df \quad (21)$$



$$\phi_{fES}(f) = S_f^*(f) \cdot S_f(f) = |S_f(f)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{SS}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (22)$$

Setzt man in Gl. (21) $\tau = 0$, erhält man die Definition für die Energie E des Energie-Signals $s(t)$ und auch die Erklärung für die Bezeichnung "Energiedichte-Spektrum" oder "spektrale Energiedichte" $\phi_{fES}(f)$:

$$E = \varphi_{SS}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{fES}(f) df \quad (23)$$

Ersetzt man in Gl. (23) die spektrale Energiedichte $\phi_{fES}(f)$ durch den Ausdruck $|S_f(f)|^2$ (siehe Gl. (22)), führt das zu dem auf $s(t)$ angewandten "Parseval'schen Theorem":

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_f(f)|^2 df \quad (24)$$

Dieses Theorem besagt allgemein, dass die Gesamt-Energie E eines Signals $s(t)$ entweder im Zeitbereich oder, mittels der spektralen Energiedichte $\phi_{fES}(f)$, im Frequenzbereich berechnet werden kann.

Hinweis:

Bei der durch Gl. (24) festgelegten Definition der Grösse "Energie" wird meistens davon ausgegangen, dass das Signal $s(t)$ eine im Werte- und Definitionsbereich vollständig normierte Funktion symbolisiert. Das heisst, dass in diesem Fall sowohl die abhängige Variable s (Wertebereich) als auch die unabhängige Variable t (Definitionsbereich) eine normierte Grösse mit jeweils der Einheit "1" darstellt. Die in der Nachrichtentechnik verwendete Grösse "Energie" zeigt also generell nicht die sonst für die Energie übliche Einheit " $W \cdot s$ " (Wattsekunde), sondern ist bei Verwendung vollständig normierter Signale durch die Einheit "1" gekennzeichnet.

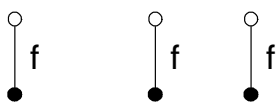
Auch bei der Festlegung der mit der Filter-Stossantwort $h(t)$ verknüpften Grössen, die für die Optimierung des Signal-Rauschleistungsverhältnisses S_a/N_a notwendig sind, wird davon ausgegangen, dass die Filter-Stossantwort $h(t)$ mit der Fourier-Transformierten

$$H_f(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \quad (25)$$

ein reellwertiges Energiesignal ist.

Die Autokorrelationsfunktion $\phi_{hh}(\tau)$ und das Energiedichte-Spektrum $\phi_{fEH}(f)$ der Stossantwort $h(t)$ sind ebenfalls über die Fourier-Transformation miteinander verbunden:

$$\phi_{hh}(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot h(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{fEH}(f) e^{j2\pi f \tau} df \quad (26)$$



$$\phi_{fEH}(f) = H_f^*(f) \cdot H_f(f) = |H_f(f)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{hh}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (27)$$

Setzt man in Gl. (26) $\tau = 0$, erhält man die Definition für die Energie E_h der Stossantwort $h(t)$. Es gilt:

$$E_h = \varphi_{hh}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{fEh}(f) df \quad (28)$$

Der Austausch der in Gl. (28) erscheinenden spektrale Energiedichte $\phi_{fEh}(f)$ durch den Ausdruck $|H_f(f)|^2$ (siehe Gl. (27)) führt zu dem auf $h(t)$ angewandten "Parseval'schen Theorem":

$$E_h = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_f(f)|^2 df \quad (29)$$

Zu den beiden nicht determinierten, störenden reellwertigen Rauschsignalen $n(t)$ und $n_a(t)$, die zur Gruppe der sogenannten "Leistungssignale" gezählt werden und von denen hier angenommen werden soll, dass sie ergodisch sind, existieren keine Fourier-Transformierten. Man kann aber unter bestimmten, in der Praxis näherungsweise gegebenen Bedingungen (siehe Literatur, Stichworte: "Ergodizität", "stationäre Rauschsignale") die beiden Autokorrelationsfunktionen $R_{nn}(\tau)$ und $R_{n_a n_a}(\tau)$ wie folgt definieren:

$$R_{nn}(\tau) = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n(t) \cdot n(t + \tau) dt \right) \quad (30)$$

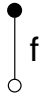
sowie

$$R_{n_a n_a}(\tau) = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n_a(t) \cdot n_a(t + \tau) dt \right) \quad (31)$$

Die "Leistungsdichte-Spektren" $S_{f_{nn}}(f)$ und $S_{f_{n_a n_a}}(f)$ der beiden Rauschsignale $n(t)$ und $n_a(t)$ erhält man durch Fourier-Transformation der Autokorrelationsfunktionen $R_{nn}(\tau)$ bzw. $R_{n_a n_a}(\tau)$.

Die Beziehungen zwischen dem Leistungsdichte-Spektrum $S_{f_{nn}}(f)$ und der Autokorrelationsfunktion $R_{nn}(\tau)$ des am Eingang des Filter-Systems beobachtbaren Rauschsignals $n(t)$ werden durch die beiden folgenden Gleichungen beschrieben:

$$S_{f_{nn}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{nn}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (32)$$



$$R_{nn}(\tau) = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n(t) \cdot n(t+\tau) dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f_{nn}}(f) \cdot e^{j2\pi f \tau} df \quad (33)$$

Das Leistungsdichte-Spektrum $S_{f_{n_a n_a}}(f)$ und Autokorrelationsfunktion $R_{n_a n_a}(\tau)$ des am Filter-System-Ausgang auftretenden Rauschsignals $n_a(t)$ sind entsprechend zugeordnet:

$$S_{f_{n_a n_a}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{n_a n_a}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (34)$$



$$R_{n_a n_a}(\tau) = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n_a(t) \cdot n_a(t+\tau) dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f_{n_a n_a}}(f) \cdot e^{j2\pi f \tau} df \quad (35)$$

Setzt man in Gl. (33) und in Gl. (35) $\tau=0$, so erhält man:

$$R_{nn}(0) = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n^2(t) dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f_{nn}}(f) df \quad (36)$$

bzw.

$$R_{n_a n_a}(0) = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n_a^2(t) dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f_{n_a n_a}}(f) df \quad (37)$$

Da, wie man zeigen kann, die Autokorrelationsfunktion eines ergodischen Rauschsignals (so wie die Autokorrelationsfunktion eines Energiesignals) stets gerade und reell in τ ist und ihr Maximum bei $\tau = 0$ hat, stellt auch das Leistungsdichte-Spektrum des Rauschsignals ebenfalls eine gerade und reelle Funktion von f dar.

Ferner zeigen die obigen Gleichungen, dass das stets bei $\tau = 0$ liegende Maximum der Autokorrelationsfunktion eines Rauschsignals den quadrierten Effektivwert bzw. die mittlere Leistung des Rauschsignals repräsentiert. Die mittlere Leistung des Rauschsignals entspricht ausserdem der Gesamt-Fläche unter der zugeordneten reellen Leistungsdichte-Spektrum-Funktion.

Diese Aussagen sind in den beiden folgenden Gleichungen noch einmal zusammenfassend dargestellt:

$$R_{nn}(0) = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n^2(t) dt \right) = \overline{n^2(t)} = n_{\text{eff}}^2 = N = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f_{nn}}(f) df \quad (38)$$

bzw.

$$R_{n_a n_a}(0) = \lim_{T_m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n_a^2(t) dt \right) = \overline{n_a^2(t)} = n_{a \text{ eff}}^2 = N_a = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f_{n_a n_a}}(f) df \quad (39)$$

Im Allgemeinen zeigen die in konstanten Frequenz-Intervallen Δf enthaltenen Teil-Leistungen, deren Summe die mittlere Rauschsignal-Leistung bilden, in unterschiedlichen Frequenz-Bereichen unterschiedliche Werte.

Betrachtet man innerhalb des Definitionsbereichs von $S_{f_{n_a n_a}}(f)$ einen Δf breiten Frequenzbereich mit der Mitten-Frequenz f , so entspricht die in diesem Bereich Δf enthaltene mittlere Teil-Leistung $\Delta N_{n_a}(f)$ des Rauschsignals $n_a(t)$ näherungsweise der Fläche $S_{f_{n_a n_a}}(f) \cdot \Delta f$.

Folglich kann der bei einer bestimmten Frequenz f auftretende Wert des Leistungsdichtespektrum $S_{f_{n_a n_a}}(f)$ umso genauer bestimmt werden, je kleiner das Intervall Δf gewählt wird. Es gilt also:

$$S_{f_{n_a n_a}}(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta N_{n_a}(f)}{\Delta f} \right) = \frac{dN_{n_a}(f)}{df} \quad (40)$$

Die in dieser Gl. (40) erscheinende Leistungsfunktion $N_{n_a}(f)$, für die

$$N_{n_a}(f) = \int_{-\infty}^f S_{f_{n_a n_a}}(v) dv \quad (41)$$

gilt, wächst monoton mit f und strebt für $f \rightarrow +\infty$ gegen die mittlere Leistung N_a des Rauschsignals $n_a(t)$.

Als Nächstes soll vorgestellt werden, wie man trotz der stochastisch, d.h. zufällig auftretenden Werte der beiden Rauschsignale $n(t)$ und $n_a(t)$, Aussagen über spektrale Eigenschaften der Reaktion $n_a(t)$ des LZI-FilterSystems auf das Eingang-Rauschsignal $n(t)$ machen kann. Dazu wird die Abb. 2 hinzugezogen.

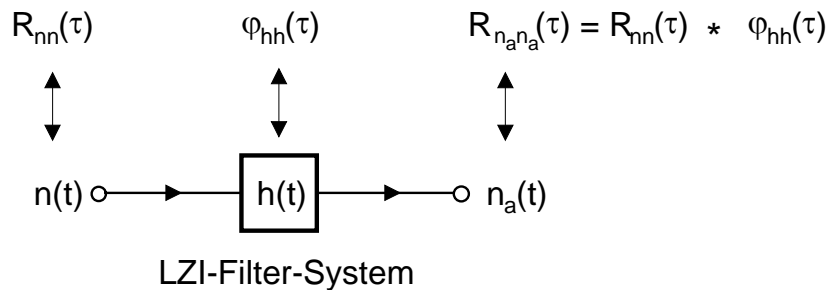


Abb. 2: Rauschsignale an einem linearen zeitinvarianten Filter-System und die über die "Wiener-Lee-Beziehung" zugeordneten Autokorrelationsfunktionen

Liegt am Eingang eines in Abb. 2 dargestellten LZI-Systems mit der Stoßantwort $h(t)$ ein Rauschsignal $n(t)$, so lautet -wie weiter oben schon erwähnt wurde- die Reaktion des Systems auf dieses Rauschsignal

$$n_a(t) = n(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (42)$$

Wie man zeigen kann (hier ohne Herleitung), gilt dann für die Autokorrelationsfunktion $R_{n_a n_a}(\tau)$ des Rauschsignals $n_a(t)$ am Ausgang des Filter-Systems:

$$R_{n_a n_a}(\tau) = R_{nn}(\tau) * \varphi_{hh}(\tau) \quad (43)$$

Diese wichtige Gleichung wird in der Nachrichtentechnik "WIENER-LEE-Beziehung" genannt. Sie verknüpft die Autokorrelationsfunktion $R_{nn}(\tau)$ des Eingangsausgangsrauschsignals $n(t)$ mit der Autokorrelationsfunktion $\varphi_{hh}(\tau)$ des Energiesignals $h(t)$ zu der Autokorrelationsfunktion $R_{n_a n_a}(\tau)$ des Ausgang-Rauschsignals $n_a(t)$.

Die Fourier-Transformation auf beide Seiten der Gleichung (43) angewandt, ergibt:

$$\begin{array}{c}
 R_{n_a n_a}(\tau) = R_{nn}(\tau) * \varphi_{hh}(\tau) \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \circ \\ | \\ f \\ \bullet \end{array} &
 \begin{array}{c} \circ \\ | \\ f \\ \bullet \end{array} &
 \begin{array}{c} \circ \\ | \\ f \\ \bullet \end{array}
 \end{array} \\
 S_{f n_a n_a}(f) = S_{f nn}(f) \cdot \phi_{f Eh}(f) \qquad (44)
 \end{array}$$

Ersetzt man in Gl. (44) das Energiedichte-Spektrum $\phi_{f Eh}(f)$ entsprechend Gl. (27) durch den quadrierten Betrag der Filter-Übertragungsfunktion $H_f(f)$, also durch $|H_f(f)|^2$, führt das zu:

$$S_{f n_a n_a}(f) = S_{f nn}(f) \cdot |H_f(f)|^2 \qquad (45)$$

Diese Beziehung, die das Leistungsdichte-Spektrum des Eingang-Rauschsignals in das Leistungsdichte-Spektrum des Ausgang-Rauschsignals umrechnet, in Gl. (39) eingesetzt, ergibt

$$R_{n_a n_a}(0) = n_{a \text{eff}}^2 = N_a = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f nn}(f) \cdot |H_f(f)|^2 df \qquad (46)$$

Die Gleichung zeigt folgendes:

Bei gegebenem Leistungsdichte-Spektrum $S_{f nn}(f)$ des Eingang-Rauschsignals $n(t)$ und bei gegebener Stossantwort $h(t)$, aus der durch Fourier-Transformation die Filter-Übertragungsfunktion $H_f(f)$ und damit auch $|H_f(f)|^2$ hergeleitet werden kann, lässt sich der quadrierte Effektivwert $n_{a \text{eff}}$ bzw. die mittlere Leistung N_a des Filterausgang-Rauschsignals $n_a(t)$ auf relativ einfache Weise berechnen.

Für die folgenden Betrachtungen sei zusätzlich vorausgesetzt, daß $n(t)$ ein Gauss' sches Rauschsignal mit $\overline{n(t)} = 0$ (siehe Gl. (15)) darstellt, dessen Leistungsdichte-Spektrum im gesamten Definitionsbereich $-\infty < f < +\infty$ den konstanten Wert N_0 zeigt:

$$S_{f nn}(f) = N_0 \quad \text{für } -\infty < f < +\infty \quad N_0 \text{ positiv, reell} \qquad (47)$$

In Anlehnung an das Sonnenlicht, das innerhalb des sichtbaren Spektralbereichs in etwa eine konstante Leistungsdichte aufweist und aus diesem Grund als "weisses" Licht wahrgenommen wird, nennt man ein Rauschsignal mit dem durch Gl. (47) beschriebenen Leistungsdichte-Spektrum "weisses Rauschen".

In der Abb. 3, die in der linken Hälfte das Leistungsdichte-Spektrum des weissen Eingang-Rauschsignals $n(t)$ zeigt, wird veranschaulicht, dass die Teil-Leistung $\Delta N_n(f)$ (= schraffierte Fläche F), die innerhalb eines jeden Frequenzintervalls der Breite Δf enthalten ist, einen von der Frequenz f unabhängigen, konstanten Wert $N_0 \Delta f$ aufweist.

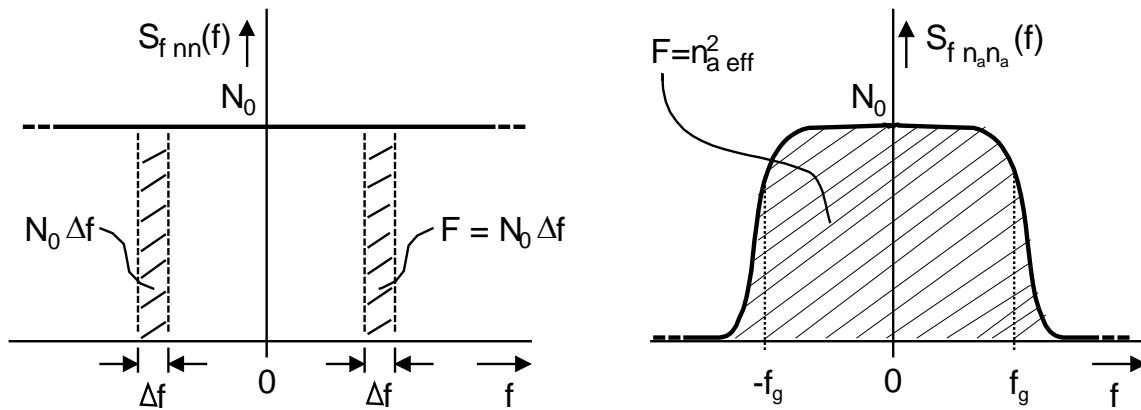


Abb. 3: Leistungsdichte-Spektrum $S_{f n n}(f)$ des "weißen" Rauschsignals $n(t)$ und Leistungsdichtespektrum $S_{f n_a n_a}(f)$ des durch Tiefpaßfilterung von $n(t)$ gewonnenen, "gefärbten" Rauschsignals $n_a(t)$

Hinweis:

Das hier als Modell eingeführte weisse Rauschsignal $n(t)$ existiert in der Natur nicht. Wie man nämlich durch Einsetzen der Gl. (47) in Gl. (38) sofort feststellen kann, würde ein "weisses" Rauschsignal eine unendlich hohe mittlere Leistung N zeigen.

Viele in der Natur vorkommenden elektrische Rauschsignale zeigen aber zumindest innerhalb eines tiefpass-begrenzten Frequenzbereichs angenähert ein konstantes Leistungsdichte-Spektrum, sodass das durch Gl. (47) beschriebene, mathematisch vereinfachende Rauschsignal-Modell akzeptiert werden kann.

Nach Einsetzen der Gl. (47) in Gl. (46) erhält man für die mittlere Leistung N_a des am Filter-Ausgang auftretenden Rauschsignals $n_a(t)$

$$N_a = N_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_f(f)|^2 df \quad (48)$$

Mittels des in Gl. (29) formulierten, auf die Stossantwort $h(t)$ angewandten PARSEVAL'schen Theorems ergibt sich hieraus schließlich:

$$N_a = N_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt \quad (49)$$

Drückt man nun noch den zum Abtastzeitpunkt T auftretenden Wert $g(T)$ des in Gl. (3) enthaltenen Nutzsignals $g(t)$ durch das Faltungsintegral

$$g(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot s(T - \tau) d\tau \quad (50)$$

aus, so folgt hieraus, aus Gl. (14) und aus Gl. (49) für das Signal-Rauschleistungsverhältnis am Ausgang des LZI-Systems die Beziehung

$$\frac{S_a}{N_a} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot s(T - \tau) d\tau \right]^2}{N_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\tau) d\tau} \quad (51)$$

Erweitern dieser Gleichung mit der durch T und die Integrationsvariable τ ausgedrückten Signalenergie

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(T - \tau) d\tau \quad (52)$$

führt schließlich zu

$$\frac{S_a}{N_a} = \frac{E}{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(T - \tau) d\tau} \cdot \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot s(T - \tau) d\tau \right]^2}{N_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\tau) d\tau} = \frac{E}{N_0} \cdot \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot s(T - \tau) d\tau \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\tau) d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(T - \tau) d\tau} \quad (53)$$

bzw. nach Einführung des abkürzenden Faktors B zu

$$\frac{S_a}{N_a} = \frac{E}{N_0} \cdot B \quad (54)$$

Die weitere Auswertung des in dieser Gleichung auftretenden Faktors B mit

$$B = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot s(T - \tau) d\tau \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\tau) d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(T - \tau) d\tau} \quad (55)$$

erfolgt mit Hilfe der "SCHWARZ' schen Ungleichung"

$$\left[\int_a^b f(x) \cdot z(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b z^2(x) dx \quad f(x), z(x) \text{ reell} \quad (56)$$

Die linke Seite dieser Ungleichung entspricht dem Zähler in der Gl. (55), während die rechte Seite dem Nenner in der Gl. (55) entspricht.

Da, wie man zeigen kann, das Gleichheitszeichen in der Schwarz' schen Ungleichung genau dann gilt, wenn $f(x)$ der Gleichung

$$f(x) = K \cdot z(x) \quad K \text{ konst., reell} \quad (57)$$

genügt, nimmt der durch Gl. (55) beschriebene Faktor B den **maximalen** Wert 1 genau dann an, wenn die Stossantwort $h(t)$ bei vorgegebenem Trägersignal $s(t)$ die Gleichung

$$h(t) = K \cdot s(T - t) \quad (58)$$

erfüllt.

Hieraus folgt:

Liegt am Eingang eines LZI-Filter-Systems ein durch weißes gauß'sches Rauschen (zeitlicher Mittelwert $\overline{n(t)} = 0$, Leistungsdichte-Spektrum $S_{f_{nn}}(f) = N_0$) gestörtes Signal $s(t)$, so nimmt das durch Gl. (14) definierte Signal-Rauschleistungsverhältnis S_a/N_a genau dann seinen maximalen Wert, nämlich

$$\frac{S_a}{N_a} = \frac{E}{N_0} \quad (59)$$

an, wenn für die optimierende Stoßantwort $h(t)$ des LZI-Systems die folgende Beziehung

gilt:

$$h(t) = K \cdot s(T - t). \quad (60)$$

Für alle anderen, von $h(t)$ abweichenden Stoßantworten ist das Signal-Rauschleistungsverhältnis kleiner als E/N_0 .

Ein LZI-System, dessen Stoßantwort in der durch Gl. (55) angezeigten Weise an ein vorgegebenes Signal $s(t)$ angepaßt ist, wird als "**matched filter**", "signalangepaßtes Filter", "optimales Suchfilter" oder "Korrelationsfilter" bezeichnet.

Die Gl. (60) zeigt, dass das S_a/N_a -Verhältnis am Ausgang eines matched filter **nur** von der Energie E des Trägersignals $s(t)$ und vom Wert N_0 des Leistungsdichte-Spektrum des Störsignals $n(t)$ abhängt, **nicht** jedoch von dem speziellen Signalverlauf von $s(t)$.

Bei den bisherigen Betrachtungen war für das Trägersignal $s(t)$ nur vorausgesetzt worden, dass es ein Energiesignal ist. Restriktionen z.B. hinsichtlich der zeitlichen Dauer des Signals $s(t)$ oder hinsichtlich seiner zeitlichen Position gab es nicht. Beim Entwurf eines auf $s(t)$ angepassten Filters hat man jedoch zu berücksichtigen, dass realisierbare Filter stets kausale Systeme darstellen und daher die matched-filter-Stoßantwort $h(t)$ die Kausalität-Bedingung

$$h(t) = 0 \quad \text{für } t < 0 \quad (61)$$

erfüllen muss.

Wie man anhand der Gl. (60) und mittels entsprechender Beispiele für $s(t)$ zeigen kann, ist die durch Gl. (61) für die matched-filter-Impulsantwort $h(t)$ definierte Kausalität-Bedingung bei fest vorgegebenem Abtast-Zeitpunkt T streng nur einzuhalten, wenn das ebenfalls vorgegebene Energie-Signal $s(t)$ die Bedingung

$$s(t) = 0 \quad \text{für } t > T \quad (62)$$

erfüllt.

Setzt man die durch Gl. (60) beschriebene Stoßantwort des matched-filter in Gleichung (2) ein, so erhält man für die Reaktion $y(t)$ des matched filter:

$$y(t) = [s(t) * K \cdot s(T - t)] + [n(t) * K \cdot s(T - t)] \quad (63)$$

bzw. durch die Faltungsintegrale ausgedrückt:

$$y(t) = K \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \cdot s(T - (t - \tau)) d\tau + K \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} n(\tau) \cdot s(T - (t - \tau)) d\tau \quad (64)$$

Hieraus folgt mittels der Substitution $\tau^* = \tau + T - t$

$$y(t) = K \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau^*) \cdot s(\tau^* + (t - T)) d\tau^* + K \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} n(\tau^*) \cdot n(\tau^* + (t - T)) d\tau^* . \quad (65)$$

Definiert man mittels der Gleichung

$$\varphi_{SS}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot s(t + \tau) dt \quad (66)$$

die in τ gerade Autokorrelationsfunktion des Signals $s(t)$, kann man durch Einsetzen von $\tau = 0$ direkt feststellen, dass das Maximum $\varphi_{SS}(0)$ gleich ist der Energie E des Signals $s(t)$. Es gilt, wie bereits durch Gl. (24) gezeigt wurde, nämlich

$$\varphi_{SS}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) \cdot dt = E \quad (67)$$

Definiert man ferner mit

$$R_{Sn}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot n(t + \tau) dt \quad (68)$$

die Kreuzkorrelationsfunktion der beiden Signal $s(t)$ und $n(t)$, so ergibt sich aus Gl. (65):

$$y(t) = K \cdot \varphi_{SS}(t - T) + K \cdot R_{Sn}(t - T) = g(t) + n_a(t) \quad (69)$$

Diese Gleichung zeigt unmittelbar, daß das matched filter auf das Signal $s(t)$ mit einer Zeitfunktion $g(t)$ reagiert, deren Verlauf dem Verlauf der um T verzögerten Autokorrelationsfunktion $\varphi_{SS}(\tau)$ von $s(t)$ entspricht.

Der von $n(t)$ herrührende Störanteil $n_a(t)$ des Matched-Filter-Ausgangssignals ist gleichzusetzen der um T verzögerten, aus $s(t)$ und $n(t)$ gebildeten Kreuzkorrelationsfunktion $R_{sn}(t)$.

Stellt $s(t)$ ein kausales, in t finites Signal mit der Länge T dar, dessen zeitliche Restriktion durch

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 0 & \text{für } t > T \end{cases} \quad (70)$$

beschrieben wird, und wird $y(t)$ zum Zeitpunkt $t = T$ abgetastet, ergibt sich nach Einsetzen von $t = T$ in Gl. (69) für den Abtastwert $y(T)$

$$y(T) = K \cdot \varphi_{ss}(0) + K \cdot R_{sn}(0) = g(T) + n_a(T) \quad (71)$$

Diese Gleichung zeigt, daß zum Zeitpunkt $t = T$, der das Ende des Signals $s(t)$ kennzeichnet, der Nutzsignalanteil $g(t)$ gemäß Gl. (71) seinen Maximalwert, nämlich

$$g(T) = K \cdot \varphi_{ss}(0) = K \cdot E \quad (72)$$

erreicht.

1.3 Prinzip der unipolaren Binärübertragung

Anhand der Abb. 4 soll das Prinzip der sogenannten "unipolaren Binär-Übertragung" erläutert werden, die in der Nachrichtentechnik häufig eingesetzt wird.

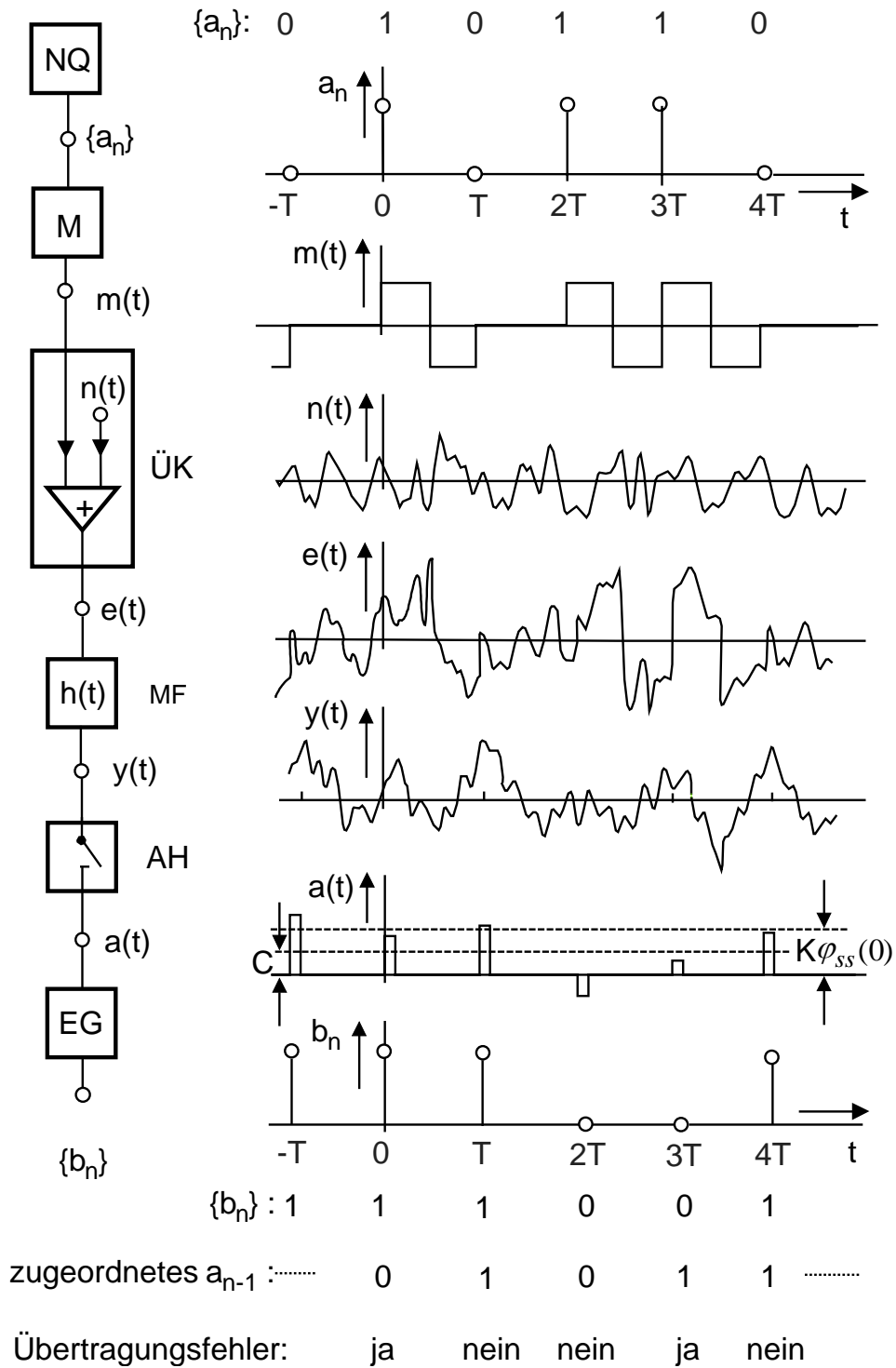


Abb. 4 Unipolare Binärübertragung über einen gestörten Übertragungskanal mit matched-filter-Empfang.

Am Ausgang einer Nachrichtenquelle NQ erscheint im Abstand der Taktzeit T eine Folge $\{a_n\}$ von Binärwerten a_n (n ganzzahlig, $-\infty < n < +\infty$), wie sie z.B. nach Analog-Digital-Wandlung zeit- und wertkontinuierlicher Signale beobachtet werden können. Die einzelnen Elemente a_n haben entweder den Wert 1 oder den Wert 0.

Beim unipolaren Verfahren wird nun im Modulator M nach dem Schema

$$\begin{aligned} a_n = 1 & \rightarrow s(t) \text{ gesendet} \\ a_n = 0 & \rightarrow s(t) \text{ nicht gesendet} \end{aligned}$$

jedem a_n -Wert ein festes, in t finites "Trägersignal" $s(t)$ der Länge T so zugeordnet, daß am Modulatorausgang das folgende Sendesignal erscheint:

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot s(t-nT) \quad (73)$$

Die durch diese Gleichung definierte Modulationsart wird "Amplitudentastung" oder auch "ASK" (engl.: amplitude shift keying) genannt.

Wie man der Abbildung 4 entnehmen kann, ist als Beispiel für ein Trägersignal $s(t)$ ein zeitbegrenzter (finiter) Rechteck-Doppel-Impuls der Länge T genommen worden.

In der Praxis verwendet man in der Regel Trägersignale,

- die nicht streng zeitbegrenzt sind und daher ein Frequenzspektrum zeigen, das praktisch eine endliche Bandbreite aufweist, und
- die bei matched-filter-Empfang eine Autokorrelationsfunktion besitzen, die die 1. NYQUIST-Bedingung, nämlich

$$\varphi_{SS}(nT) = 0 \quad \text{für alle } n \neq 0 \quad (74)$$

erfüllt. Damit wird erreicht, daß bei der noch unten zu behandelnden Abtastung zu den Zeitpunkten nT die störenden "Eigen-interferenz"-Ausgangssignale ausgeschaltet sind, die durch die Nachbar-Trägersignale $a_m \cdot s(t-mT)$ mit $m \neq n$ verursacht werden.

Bei der Übertragung des ASK-Sendesignals $m(t)$ über den gestörten Übertragungskanal ÜK (siehe Abb. 4) wird das Signal $m(t)$ von einem Rauschsignal $n(t)$ überlagert.

Daher beobachtet man am Ausgang des Übertragungskanals ÜK (siehe Abb. 4) das Signal

$$e(t) = m(t) + n(t) \quad (75)$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung der Gl. (73)

$$e(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot s(t - nT) \right) + n(t) \quad (76)$$

Die Reaktion $y(t)$ des durch die Stoßantwort $h(T-t)$ charakterisierten matched filters MF (siehe Abb. 4) auf $e(t)$ lautet dann:

$$y(t) = \left\{ \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot s(t - nT) \right) + n(t) \right\} * K \cdot s(T - t) \quad (77)$$

bzw. nach Anwendung der Faltungsoperation auf die in der geschweiften Klammer stehende Summe

$$y(t) = \left\{ \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot s(t - nT) \right) * K \cdot s(T - t) \right\} + \{ n(t) * K \cdot s(T - t) \} \quad (78)$$

Drückt man das Signal $y(t)$ durch die entsprechenden Faltungsintegrale aus, erhält man

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot s(\tau - nT) \right\} \cdot K \cdot s(T - (t - \tau)) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} n(\tau) \cdot K \cdot s(T - (t - \tau)) d\tau \quad (79)$$

Hieraus erhält man nach einer Berechnung, die im Prinzip so wie die Bestimmung der Gl. (69) verläuft:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot K \cdot \varphi_{SS}(t - (n+1)T) + K \cdot R_{Sn}(t - T) \quad (80)$$

Der in dieser Gleichung auftretende Summen-Term beschreibt den Nutzsignal-Anteil

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot K \cdot \varphi_{SS}(t - (n+1)T) \quad (81)$$

des matched-filter-Ausgangssignals, während der Kreuzkorrelation-Term $K \cdot R_{Sn}(t - T)$ das am matched-filter-Ausgang erscheinende Rauschsignal $n_a(t)$ darstellt.

Es gilt:

$$n_a(t) = K \cdot R_{sn}(t - T) \quad (82)$$

Der Gl. (81) ist zu entnehmen, daß der Nutzsinalanteil $g(t)$ der Reaktion $y(t)$ aus einer Summe von Autokorrelationssignalen besteht. Dabei stellt das einzelne Autokorrelationssignal $a_n \cdot K \cdot \varphi_{ss}(t - (n+1)T)$ die matched-filter-Reaktion auf das zugeordnete Signal $a_n \cdot s(t - nT)$ dar.

Das heißt aber, daß zur Wiederentdeckung eines bestimmten zum Zeitpunkt vT auftretenden Wertes a_v der Nutzsinalanteil $g(t)$ auf jeden Fall zum Zeitpunkt $(v+1)T$ abgetastet werden muß, da genau zu diesem Zeitpunkt die dem Wert a_v zugeordnete und mit $a_v \cdot K$ bewertete Autokorrelationsfunktion $\varphi_{ss}(t - (v+1)T)$ ihren Maximalwert erreicht. Dies folgt, wenn man Gl. (81) wie folgt umformt in

$$g(t) = a_v \cdot K \cdot \varphi_{ss}(t - (v+1)T) + \sum_{n=-\infty}^{v-1} a_n \cdot K \cdot \varphi_{ss}(t - (n+1)T) + \sum_{n=v+1}^{\infty} a_n \cdot K \cdot \varphi_{ss}(t - (n+1)T) \quad (83)$$

und dann $t = (v+1)T$ setzt:

$$g((v+1)T) = a_v \cdot K \cdot \varphi_{ss}(0) + \sum_{n=-\infty}^{v-1} a_n \cdot K \cdot \varphi_{ss}((v-n)T) + \sum_{n=v+1}^{\infty} a_n \cdot K \cdot \varphi_{ss}((v-n)T) \quad (84)$$

Die beiden rechten Summen-Terme dieser Gleichung stellen die bereits oben erwähnten Eigen-Interferenzen dar, die sich dem eigentlich interessierenden Term $a_v \cdot K \cdot \varphi_{ss}(0)$ störend überlagern.

Der störende Einfluß dieser Summen-Terme kann - wie oben schon erwähnt - ausgeschaltet werden, wenn $\varphi_{ss}(\tau)$ die 1. NYQUIST-Bedingung erfüllt, wenn also gilt:

$$\varphi_{ss}((v-n)T) = 0 \quad \text{für alle } (v-n) \neq 0 \quad (85)$$

Unter der Bedingung, dass $\varphi_{ss}(\tau)$ der 1. NYQUIST-Bedingung genügt, erhält man aus Gl. (84) für den zum Zeitpunkt $(v+1)T$ auftretenden Nutzsinal-Wert

$$g((v+1)T) = a_v \cdot K \cdot \varphi_{ss}(0) \quad (86)$$

Die periodische Abtastung zu den Zeitpunkten $t_v = (v+1)T$ erfolgt mit der in Abb. 4 gezeigten elektronischen Abtast-Halte-Schaltung AH, deren Ausgangssignal $a(t)$ bei gegebener Haltezeit $T_h \leq T$ wie folgt beschrieben werden kann:

$$a(t) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} y((v+1)T) \cdot \text{rect}\left(\frac{t - (v+1)T - \frac{T_h}{2}}{T_h}\right) \quad (87)$$

Setzt man in Gl. (80) die Zeitpunkte $t = t_v = (v+1)T$ ein und setzt man voraus, dass entsprechend Gl. (85) die 1. Nyquist-Bedingung für die Autokorrelationsfunktion $\varphi_{ss}(\tau)$ des Energiesignals $s(t)$ erfüllt ist, erhält man

$$y((v+1)T) = a_v \cdot K \cdot \varphi_{ss}(0) + R_{sn}(vT) = a_v \cdot K \cdot \varphi_{ss}(0) + n_a((v+1)T) \quad (88)$$

Dies in Gl. (87) eingesetzt, führt zu

$$a(t) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \{a_v \cdot K \cdot \varphi_{ss}(0) + n_a((v+1)T)\} \cdot \text{rect}\left(\frac{t - (v+1)T - \frac{T_h}{2}}{T_h}\right) \quad (89)$$

Das am Ausgang der Abtast-Halte-Schaltung AH auftretende Impulssignal $a(t)$, dessen Einzel-Impulse die durch Gl. (88) beschriebenen Amplitudenwerte zeigen, wird auf das Entscheidungsglied EG (siehe Abb. 4) geschaltet.

Im wesentlicher besteht dieses Entscheidungsglied aus einem Komparator, der jeden Einzel-Impuls von $a(t)$ mit einem fest eingestellten Schwellenwert C vergleicht.

Unter der Annahme, dass das Rauschsignal $n_a(t)$ gauss-verteilt mit dem Mittelwert $\overline{n_a(t)} = 0$ auftritt und dass ferner die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses " $a_n = 1$ " gleich der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses " $a_n = 0$ " ist, dass also

$$\Pr(a_n = 1) = \Pr(a_n = 0) = 0.5 \quad (90)$$

gilt, wird bei der hier behandelten unipolaren Binärübertragung der Schwellenwert C so eingestellt, daß er gleich dem halben, maximalen Nutzsingal-Anteil $g(t)$ ist:

$$C = \frac{K \cdot \varphi_{ss}(0)}{2} = \frac{K \cdot E}{2} \quad (91)$$

Ist der zum Abtastzeitpunkt $(v+1)T$ beobachtete Wert $y((v+1)T)$ und damit die entsprechende Amplitude $\{a_v \cdot K \cdot \varphi_{ss}(0) + n_a((v+1)T)\}$ von $a(t)$ größer als der Schwellenwert C , entscheidet das Entscheidungsglied EG " $a_v = 1$ " bzw. "Signal $s(t - vT)$ wurde gesendet".

Ist die Amplitude $y((v+1)T)$ von $a(t)$ kleiner als C oder gleich C , lautet die Entscheidung " $a_v = 0$ " bzw. "Signal $s(t - vT)$ wurde nicht gesendet".

Der Algorithmus des Entscheidungsgliedes lautet, ausgedrückt durch den Laufindex n :

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } y(nT) > C \Rightarrow "a_{n-1} = 1" \Rightarrow "s(t - (n-1)T) \text{ gesendet}" \\ 0 & \text{wenn } y(nT) \leq C \Rightarrow "a_{n-1} = 0 \Rightarrow "s(t - (n-1)T) \text{ nicht gesendet}" \end{cases} \quad (92)$$

Am Ausgang des Entscheidungsgliedes erscheint dementsprechend eine Folge $\{b_n\}$, deren Einzelelemente entweder den Wert 1 oder den Wert 0 aufweisen.

Stimmt der zum Abtastzeitpunkt nT auftretende b_n -Wert mit dem zum Zeitpunkt $(n-1)T$ am Ausgang der Nachrichtenquelle auftretenden Wert a_{n-1} überein, ist a_{n-1} richtig übertragen worden.

Stimmt der Wert von b_n nicht mit dem zugeordneten Wert a_{n-1} überein, liegt ein Übertragungsfehler vor.

Es ist plausibel, daß die Anzahl n_e derartiger Übertragungsfehler pro Gesamtzahl n aller übertragener Bits (Bit-Sequenz), die sogenannte relative Fehlerhäufigkeit h_e mit

$$h_e = \frac{n_e}{n} \quad (93)$$

umso größer ist, je kleiner das durch Gl. (14) definierte Signal-Rauschleistungsverhältnis S_a/N_a ist.

Im Falle der unipolaren Binärübertragung (siehe Abb. 4) geschieht die Messung der relativen Fehlerhäufigkeit h_e im Prinzip wie folgt:

Die Nachrichtenquelle NQ liefert eine festgelegte Bit-Sequenz von n_0 Nullen und n_1 Einsen, also insgesamt

$$n = n_0 + n_1 \quad (94)$$

Bits an ihren Ausgang.

Die einzelnen innerhalb der Bit-Sequenz liegenden Bit-Werte a_n werden im Rahmen des Seminarversuchs im Modulator, der aus einem Trägersignal-Generator und einem linearen Tor aufgebaut ist, auf das vorgegebene, in Abb. 5 dargestellte Trägersignal $s(t)$ aufmoduliert.

Das dadurch entstehende Sendesignal $m(t)$ gelangt über den rauschbehafteten Übertragungskanal ÜK, der im Seminar-Versuchsaufbau aus einem Rauschgenerator RG und einem Addierer nachgebildet ist, auf den Eingang des matched filter MF.

Das auf das Signal $s(t)$ angepasste matched filter besteht, wie in Abb. 6 dargestellt, aus

- einem elektronischen Integrator (Operationsverstärker-Schaltung),
- drei Verzögerungsleitungen, die nach dem Prinzip der Eimerkettenschaltung arbeiten und daher zu ihrer Ansteuerung bzw. Kontrolle ein zusätzlichen Taktgenerator bzw. einen Taktzähler benötigen sowie
- einem Addierer (Operationsverstärker-Schaltung).

Am Ausgang des matched filter kann zur Bestimmung des Signal-Rauschleistungs-Verhältnisses S_a/N_a (siehe Gl. (14)) mit Hilfe eines Effektivwertmessers der Effektivwert $n_{a\text{eff}}$ des in $y(t)$ enthaltenen Rauschsignal-Anteils $n_a(t)$ gemessen werden.

Das matched-filter-Ausgangssignal $y(t)$ wird in der Abtast-Halte-Schaltung AH zu den Zeitpunkten $t_n = nT$ abgetastet. Die dabei entstehenden Abtastwerte werden im Entscheidungsglied EG mit der festen Schwellenspannung C (siehe Gl. (91)) verglichen und in die entsprechenden Bits mit den Werten b_n umgewandelt.

Eine logische Vergleichsschaltung, die im einfachsten Fall als logische Antivalenzschaltung realisiert werden kann, vergleicht die von der Nachrichtenquelle NQ gelieferten Werte a_{n-1} mit den vom Entscheidungsglied EG ausgegebenen Werten b_n .

Die am Ausgang der logischen Vergleichsschaltung auftretenden Fehler-Impulse (Fehler-Bits), die anzeigen, dass a_{n-1} und b_n wertmäßig nicht übereinstimmen, werden mit einem Impuls-Zähler zu der Gesamt-Fehlerzahl

$$n_e = n_{01} + n_{10} \quad (95)$$

aufsummiert.

Dabei bedeuten

n_{01} die Anzahl der Fehlerfälle, bei denen einzelnen Null-Bits der insgesamt n_0 ausgesendeten Null-Bits eine Eins zugeordnet wurde, und

n_{10} die Anzahl der Fehlerfälle, bei denen einzelnen Eins-Bits der insgesamt n_1 ausgesendeten Eins-Bits eine Null zugeordnet wurde.

Einsetzen der Gl. (95) in Gl. (93) führt zu

$$h_e = \frac{n_e}{n} = \frac{n_{01} + n_{10}}{n} = \frac{n_{01}}{n} + \frac{n_{10}}{n} \quad (96)$$

Erweitert man hierin mit der Zahl n_0 der in der gesendeten Bit-Sequenz enthaltenen Null-Bits bzw. mit der Zahl n_1 der in der gesendeten Bit-Sequenz enthaltenen Eins-Bits, erhält man für die relative Fehlerhäufigkeit

$$h_e = \frac{n_e}{n} = \frac{n_{01}}{n_0} \cdot \frac{n_0}{n} + \frac{n_{10}}{n_1} \cdot \frac{n_1}{n} \quad (97)$$

Definiert man mit

$$h_{e|a_n=0} = \frac{n_{01}}{n_0} \quad (98)$$

die relative Häufigkeit eines Übertragungsfehlers unter der Bedingung, dass eine Null gesendet wurde, mit

$$h_0 = \frac{n_0}{n} \quad (99)$$

die relative Häufigkeit des Auftretens einer Null am Ausgang der Nachrichtenquelle NQ, mit

$$h_{e|a_n=1} = \frac{n_{10}}{n_1} \quad (100)$$

die relative Häufigkeit eines Übertragungsfehlers unter der Bedingung, dass eine Eins gesendet wurde, und schliesslich mit

$$h_1 = \frac{n_1}{n} \quad (101)$$

die relative Häufigkeit des Auftretens einer Eins am Ausgang der Nachrichtenquelle NQ, kann man Gl. (97) umschreiben in

$$h_e = h_{e|a_n=0} \cdot h_0 + h_{e|a_n=1} \cdot h_1 \quad (102)$$

Für $n \rightarrow \infty$ gehen die oben genannten relativen Häufigkeiten in die entsprechend bezeichneten Wahrscheinlichkeiten über. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{h_e\} = \Pr\{\text{error}\} = \Pr\{\text{error}|a_n = 0\} \cdot \Pr\{a_n = 0\} + \Pr\{\text{error}|a_n = 1\} \cdot \Pr\{a_n = 1\} \quad (103)$$

Werden von der Nachrichtenquelle NQ im Mittel genau soviel Null-Bits wie Eins-Bits ausgesendet -dies ist in der Praxis häufig der Fall-, so folgt aus Gl. (103) mit

$$\Pr\{a_n = 0\} = \Pr\{a_n = 1\} = 0.5 \quad (104)$$

für die Fehler-Auftrittswahrscheinlichkeit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{h_e\} = \Pr\{\text{error}\} = \frac{1}{2} \cdot \Pr\{\text{error}|a_n = 0\} + \frac{1}{2} \cdot \Pr\{\text{error}|a_n = 1\} \quad (105)$$

In der Praxis wird n so groß gewählt ($n > 1000$), dass gesetzt werden kann:

$$\Pr\{\text{error}\} \approx h_e = \frac{n_e}{n} \quad (106)$$

2 Vorbereitungsarbeiten

Aufgabe 2.1 (Kurzvortrag)

Der Seminarversuch startet mit einem ca. 30 Min. dauernden Kurz-Vortrag, der von einem Mitglied der Versuchsgruppe in Kooperation mit der Gruppe vorbereitet und gehalten wird.

Der Kurzvortrag soll die folgenden Themen behandeln:

- 1) Ansatz zur Entwicklung des matched filter und Eigenschaften des matched filter
- 2) Das Trägersignal $s(t)$ (Autokorrelationsfunktion, spektrale Energiedichte, Energie)
- 3) Rauschsignale (Autokorrelationsfunktion, spektrale Leistungsdichte, mittlere Leistung, Effektivwert)

Aufgabe 2.2:

Weisen Sie nach, dass für die Reaktion $g(t)$ eines LZI-Systems, das mit der nicht-kausalen Stoßantwort $h(t) = s(-t)$ auf ein gegebenes kausales Energiesignal $s(t)$ angepaßt ist, die Beziehung $g(t) = s(t) * s(-t) = \varphi_{ss}(t)$ gilt.

Aufgabe 2.3:

Gegeben ist das in Abb. 5 eingezeichnete Spannungssignal $s(t)$.

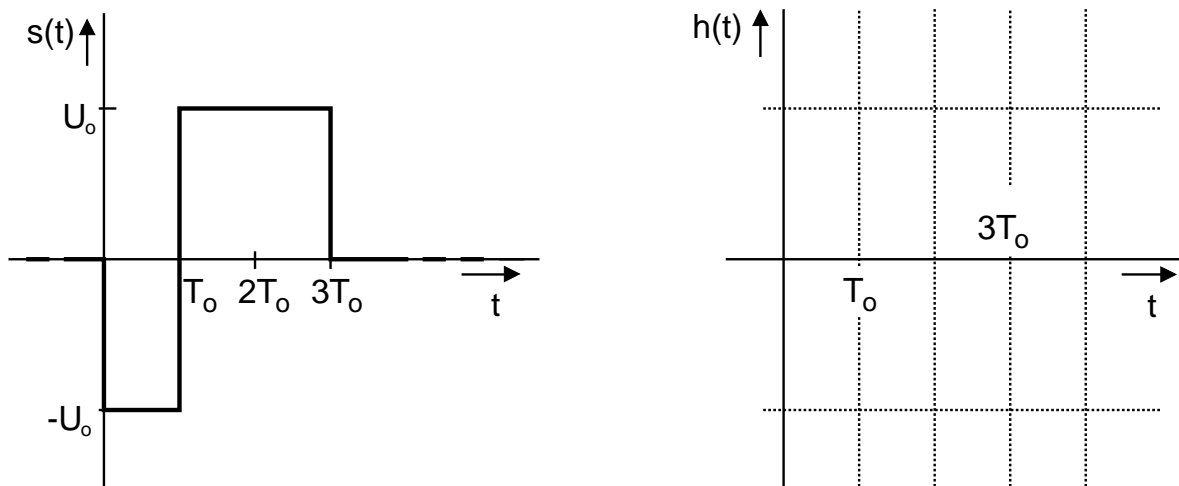


Abb. 5 Spannungssignal $s(t)$ mit $U_0 = 50 \text{ mV}$ und $T_0 = 200 \mu\text{s}$ sowie die Stoßantwort $h(t)$ des linearen, zeitinvarianten kausalen matched filters

2.3.1

Bestimmen Sie die Stoßantwort $h(t)$ des auf $s(t)$ angepaßten, kausalen LZI-System (matched filter) und tragen Sie den Verlauf von $h(t)$ in die Abb. 5 ein.

2.3.2

Welche Einheit zeigt der Wertebereich von $h(t)$, wenn das matched filter bei Erregung durch das obige Spannungssignal $s(t)$ mit einem Spannungssignal $g(t)$ reagiert? Beantworten Sie diese Frage, indem Sie die Einheiten der Terme untersuchen, die in dem zugeordneten Faltungsintegral auftreten.

Aufgabe 2.4

Gegeben ist das in Abb. 6 gezeigte LZI-System

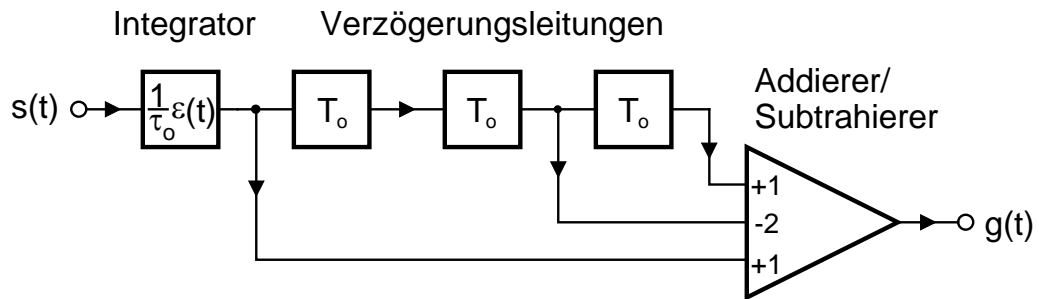


Abb. 6 Kausales LZI-System mit $\tau_0 = 40 \mu\text{s}$ und $T_0 = 200 \mu\text{s}$

2.4.1

Bestimmen Sie die Stoßantwort $h(t)$ des gezeigten LZI-Systems und tragen Sie die Stoßantwort $h(t)$ mit entsprechender Ordinaten-Skalierung in die Abb. 7 ein.

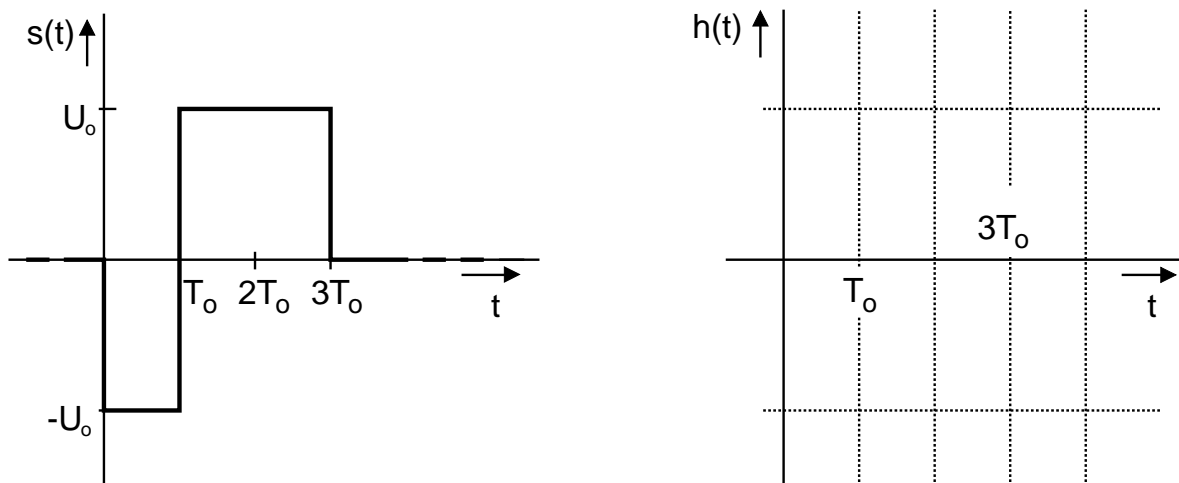


Abb. 7 Spannungssignal $s(t)$ aus Aufgabe 2.3 und Stoßantwort $h(t)$

2.4.2

Bestimmen Sie die Einheit der in der Gleichung $h(t) = K \cdot s(T - t)$ vorkommenden Konstanten K .

2.4.3

Bestimmen Sie für $n=0(1)3$ die zu den Zeitpunkten nT_0 beobachtbaren Werte $g(nT_0)$ des Ausgangssignal $g(t)$ des LZI-Systems, wenn an dessen Eingang das in Aufgabe 2.3 eingeführte Spannungssignal $s(t)$ liegt.

2.4.4

Bestimmen Sie den maximalen Wert $g(3T_0) = g(T) = \sqrt{S_a}$ und daraus S_a .

2.4.5

Tragen Sie für $0 \leq t \leq 6T_0$ das Filter-Ausgangssignal $g(t)$ mit entsprechender Ordinatenkalierung in die Abb. 8 ein.

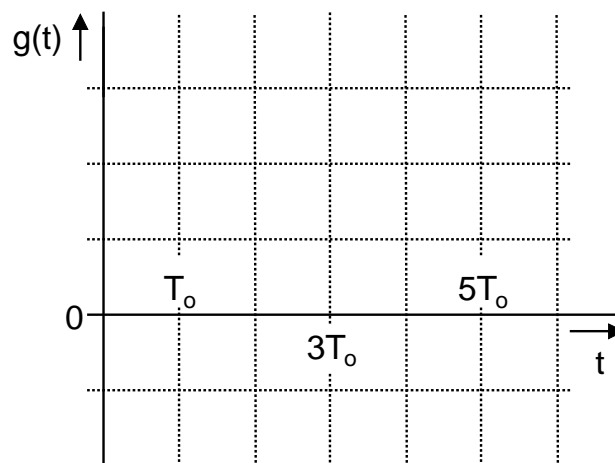


Abb. 8 Reaktion $g(t)$ des in Abb. 6 gezeigten, als matched filter arbeitendes LZI-Systems auf das Signal $s(t)$

Aufgabe 2.5

An dem in Abb. 4 gezeigten Übertragungssystem wurden für verschiedene, in der Tabelle 1 aufgeführte S_a/N_a -Verhältnisse die dabei jeweils auftretende Anzahl n_e der Übertragungsfehler gemessen und in die Tabelle eingetragen.

Die Einstellung des jeweiligen S_a/N_a -Verhältnisses erfolgte auf der Basis des unter Aufgabe 2.4.4 berechneten festen Wertes $g(T) = \sqrt{S_a}$. Und zwar wurde durch Variation der Amplitude des Rauschgenerator-Signals $n(t)$ bei abgetrennter Nachrichtenquelle NQ ($m(t)=0$) mittels eines Effektivwert-Messgeräts der am Ausgang des LZI-Systems auftretende Effektivwert $n_{a\text{eff}} = \sqrt{N_a}$ so eingestellt, dass die in der Tabelle 1 stehenden Werte $S_a/N_a = g^2(T)/n_{a\text{eff}}^2$ realisiert wurden.

Die Messungen wurden mit folgenden Geräte-Einstellungen vorgenommen:

a) Pseudo-Random-Generator als Nachrichtenquelle NQ

Einstellung: "Digital Noise"

Bit-Noise-Clock-Frequenz $f_{BC} = 160 \text{ Hz}$ (\Leftrightarrow Periodendauer $T_{BC} = 6.25 \text{ ms}$)

Bit-Sequenzlänge $n = 2^{15} - 1 = 32767$

"Digital Noise"- a_n -Amplitude am Ausgang ($R_i = 50 \Omega$): $0 \text{ V} \dots + 5 \text{ V}$

"Noise Clock"-Amplitude am Rückseite-Ausgang ($R_i = 50 \Omega$): $0 \text{ V} \dots + 5 \text{ V}$

b) Rauschsignal $n(t)$ liefernder Rauschgenerator RG

Rauschleistung-Bandbreite $B = 100 \text{ kHz}$

Mode-Schalter: "Weiss"

c) Takt-Generator zur Ansteuerung der Verzögerungsglieder

Takt-Frequenz $f_{TG} = 488 \text{ kHz}$ (\Leftrightarrow Periodendauer $T_{TG} = 2.05 \mu\text{s}$)

Takt-Generator-Ausgangsspannung $U_{TG} = 0 \text{ V} \dots + 5 \text{ V}$

2.5.1

Bestimmen Sie alle in der Tabelle 1 aufgeführten Größen und tragen Sie die Werte dieser Größen in die Tabelle ein.

S_a/N_a	4	10	50	100	150	200	vorgegeben
S_a/V^2							siehe 2.4.4
N_a/V^2							berechnen
n_{aeff}/V							berechnen
n_e	6285	3538	609	114	20	2	gemessen
$P_e = n_e/n$							berechnen

Tabelle 1 Augenblicksleistung S_a , mittlere Rauschleistung N_a , Effektivwert n_{aeff} des Rauschsignals $n_a(t)$ am matched-filter-Ausgang, gemessene Anzahl n_e der bei der Übertragung einer Bit-Sequenz n aufgetretenen Übertragungsfehler sowie die Fehlerwahrscheinlichkeit P_e als Funktion des Signal-Rauschleistungsverhältnisses S_a/N_a .

2.5.2

Tragen Sie die Werte der Fehler-Wahrscheinlichkeit P_e als Funktion des S_a/N_a -Verhältnis in die folgende Abb. 9 ein.

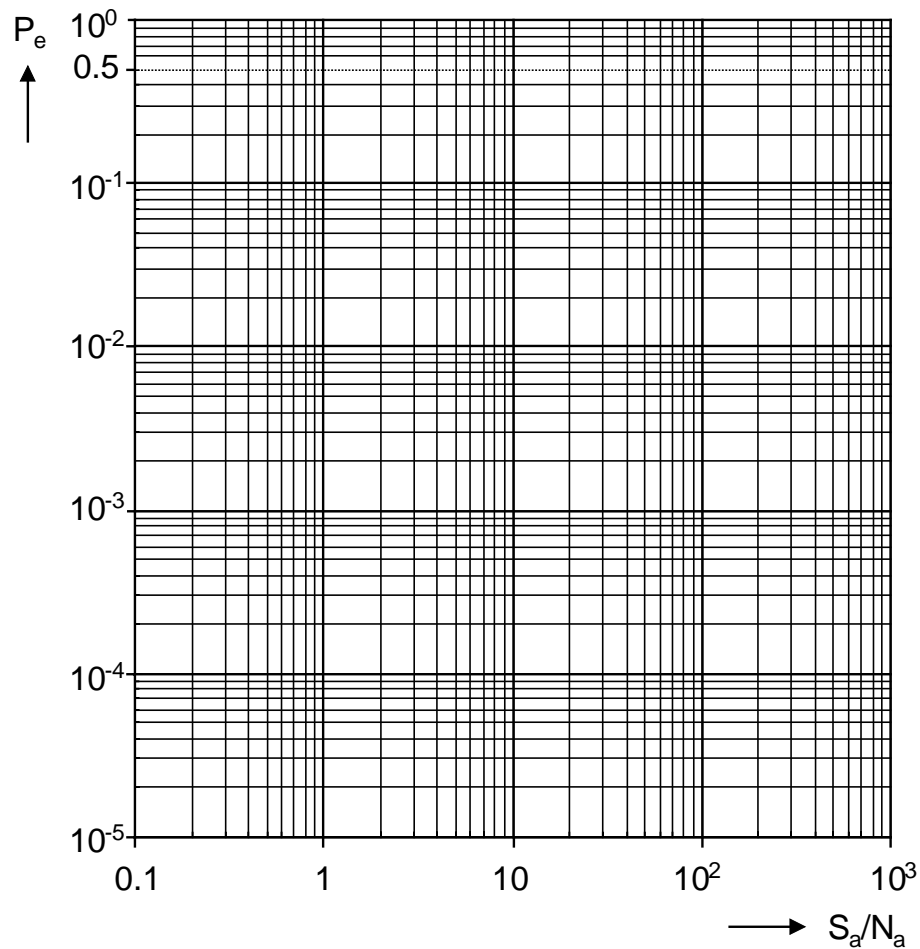


Abb. 9 Fehlerwahrscheinlichkeit $P_e = \Pr\{\text{error}\}$ als Funktion des S_a/N_a -Verhältnisses

3. Literatur

- [1] Lüke, H.D.: Signalübertragung: Einführung in die Theorie der Nachrichtenübertragungstechnik. Springer Verlag, Berlin, 1975
- [2] Papoulis, A.: Probability, Random Variables and Stochastic Processes. Mc Graw-Hill Co., New York, 1965