Seminar "Grundlagen der Nachrichtentechnik 2"
Seminarversuch 3
"Matched Filter"

SemNT2F3.doc

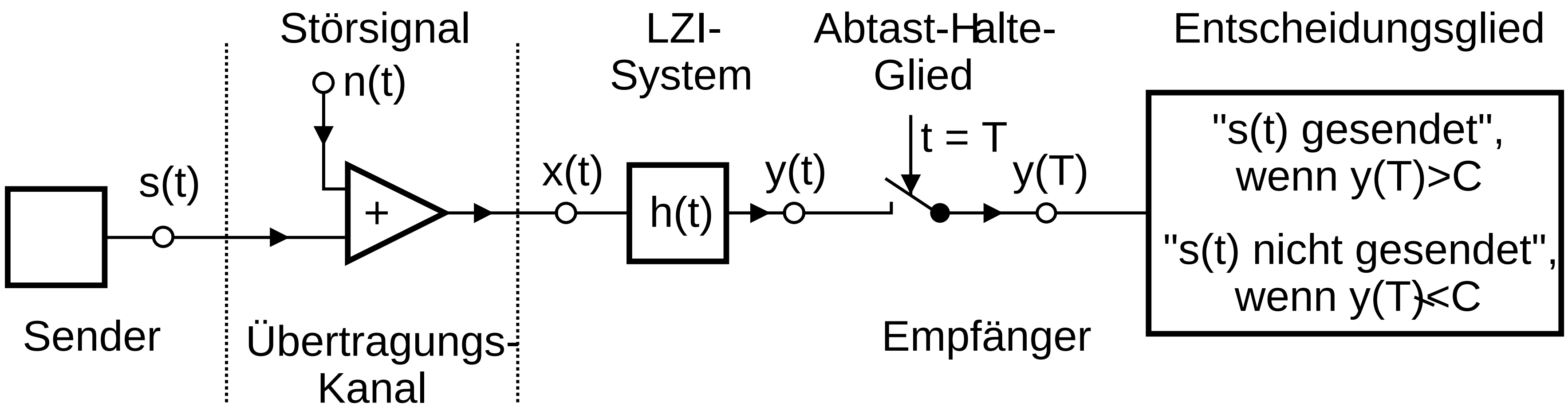
Überblick:

3.1 Der matched-filter-Ansatz

3.2 Autokorrelationsfunktion $\varphi_{ss}(\tau)$ und Energiedichte-Spektrum $\phi_{f\,Es}(f)$ reellwertiger Energiesignale s(t), "Parseval'sches Theorem"

3.3 Autokorrelationsfunktion $R_{nn}(\tau)$ u. Leistungsdichte-Spektrum $S_{f\,nn}(f)$ reellwertiger Rauschsignale n(t), "Wiener-Lee-Kriterium"

3.1 Der matched-filter-Ansatz



Gegeben:	s(t)	reellwertiges, determiniertes kausales Trägersignal der Dauer T
	n(t)	weisses, gauss'sches, stationäres Rauschsignal

Am Ausgang des LZI-Systems mit der Stoßantwort h(t):

$$y(t) = x(t) * h(t) = \left(s(t) + n(t)\right) * h(t) = s(t) * h(t) + n(t) * h(t) = g(t) + n_a(t) \tag{1}$$

Am Ausgang des Abtast-Halte-Glieds:

$$y(T) = g(T) + n_a(T) \tag{2}$$

Der störende bipolare Rauschanteil $n_a(T)$ führt zu Fehlern bei der auf y(T) und auf dem Schwellenwert C basierenden Entscheidung, ob s(t) gesendet wurde $\left(g(T) > 0\right)$ oder s(t) nicht gesendet $\left(g(T) = 0\right)$ wurde.

Unter der Bedingung, dass g(T) positiv ist, treten zwei Entscheidungsfehler-Typen auf:

Fehler-Typ a: $y(T) = g(T) + n_a(T) \leq C \quad \Rightarrow \quad$ falsche Entscheidung "s(t) nicht gesendet"

Fehler-Typ b: $y(T) = n_a(T) > C \quad \Rightarrow \quad$ falsche Entscheidung "s(t) gesendet"

Die Zahl n_e der Fehler pro Anzahl n wiederholt abgegebener Entscheidungen, d.h. die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers wächst mit steigendem Effektivwert $n_{a\,eff}$ des Rauschsignals $n_a(t)$.

Matched-Filter-Ansatz:

Unter der Bedingung, dass das am Eingang des LZI-System liegende Rauschsignal n(t) stationär ist, eine gauss'sche Wahrscheinlichkeitsdichte $p_N(n)$ mit dem Mittelwert $\overline{N} = \overline{n(t)} = 0$ zeigt und sein Leistungsdichte-Spektrum durch eine Konstante N_0 ("weisses Rauschen") beschrieben werden kann, wird für das LZI-System eine Stossantwort h(t) gesucht, die bei gegebenem Signal s(t) bewirkt, dass das am System-Ausgang beobachtbare sogenannte "Signal-Rauschleistungsverhältnis"

$$\frac{S_a}{N_a} = \frac{g^2(T)}{n^2_{a\,eff}} \qquad (3)$$

maximal wird.

Für das Signal-Rauschleistungsverhältnis S_a / N_a, ausgedrückt durch die Signalenergie E, die Rauschleistungsdichte N_0, das vorgegebene Signal s(t) und die zu bestimmende Stoßantwort h(t), gilt:

$$\frac{S_a}{N_a} = \frac{E}{N_0} \cdot \frac{\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot s(T-\tau)\, d\tau \right]^2}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h^2(\tau)\, d\tau \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s^2(T-\tau)\, d\tau} \tag{4}$$

Wie man zeigen kann, wird dieses Verhältnis maximal, wenn die Stoßantwort h(t) wie folgt lautet:

$$h(t) = K \cdot s(T-t) \tag{5}$$

Die Gl. (5) in Gl. (4) eingesetzt, führt zu dem maximalen Signal-Rauschleistungsverhältnis

$$\frac{S_a}{N_a} = \frac{g^2(T)}{n^2_{a\,\mathrm{eff}}} = \frac{E}{N_0} \tag{6}$$

Resultat:

Die Gl. (6) zeigt, dass das S_a / N_a-Verhältnis am Ausgang eines matched filter **<u>nur</u>** von der Energie E des Trägersignals s(t) und vom Wert N_0 des Leistungsdichte-Spektrum des Störsignals n(t) abhängt, **<u>nicht</u>** jedoch von dem speziellen Signalverlauf von s(t).

3.2 Autokorrelationsfunktion $\varphi_{ss}(\tau)$ und Energiedichte-Spektrum $\phi_{fEs}(f)$ reellwertiger Signale s(t), "Parseval' sches Theorem"

Gegeben: Reellwertiges Energiesignal s(t) mit der Fourier-Transformierten

$$S_f(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt \tag{7}$$

Autokorrelationsfunktion $\varphi_{ss}(\tau)$ und Energiedichte-Spektrum $\phi_{fEs}(f)$:

$$\varphi_{ss}(\tau) = s(-\tau) * s(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot s(t+\tau)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{fEs}(f) e^{j2\pi f \tau}\, df \tag{8}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet\ f \qquad\qquad \circ\!\!-\!\!\bullet\ f \qquad \circ\!\!-\!\!\bullet\ f$$

$$\phi_{fEs}(f) = S_f^*(f) \cdot S_f(f) = \left| S_f(f) \right|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{ss}(\tau) e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau \tag{9}$$

In Gl. (8) $\tau = 0$ gesetzt, ergibt:

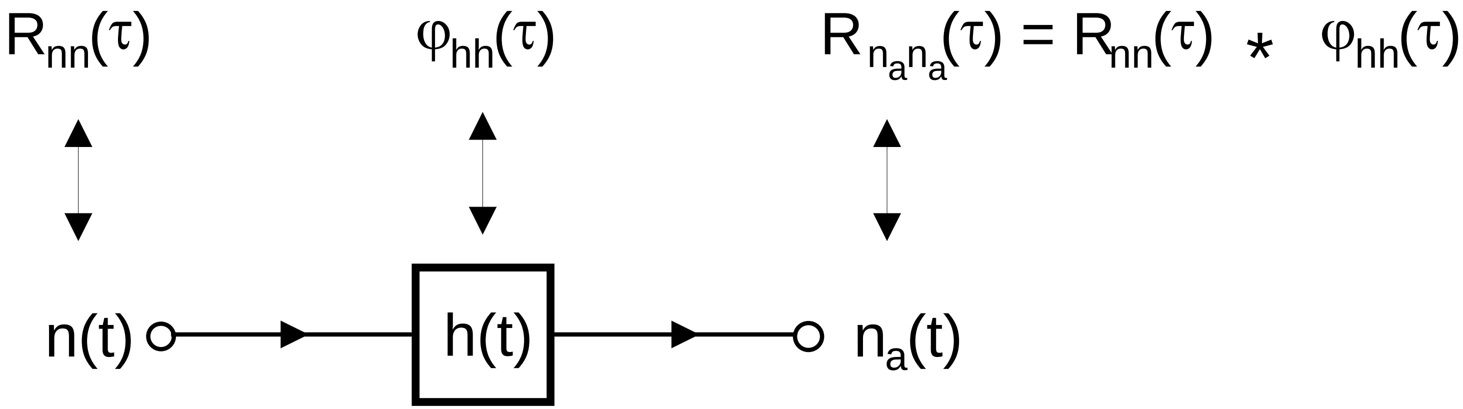
$$\varphi_{ss}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{f\,Es}(f)\,df = E \qquad (10)$$

$\Rightarrow$ Erklärung für die Bezeichnung "Energiedichte-Spektrum" oder "spektrale Energiedichte" $\phi_{f\,Es}(f)$

In Gl. (10) die spektrale Energiedichte $\phi_{f\,Es}(f)$ durch $\left|S_f(f)\right|^2$ (siehe Gl. (9)) ersetzt, führt zu dem auf s(t) angewandten "Parseval' schen Theorem":

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|S_f(f)\right|^2 df \qquad (11)$$

3.3 Autokorrelationsfunktion $R_{nn}(\tau)$ u. Leistungsdichte-Spektrum $S_{f\,nn}(f)$ reellwertiger Rauschsignale n(t), "Wiener-Lee-Kriterium"



LZI-Filter-System

Beziehung zwischen der Autokorrelationsfunktion $R_{nn}(\tau)$ und dem Leistungsdichte-Spektrum $S_{f\,nn}(f)$ des am Eingang des Filter-Systems beobachtbaren Rauschsignals n(t) wird beschrieben durch:

$$R_{nn}(\tau) = \lim_{T_m \to \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n(t) \cdot n(t+\tau)\, dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f\,nn}(f) \cdot e^{j 2\pi f \tau}\, df \quad (12)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet \; f$$

$$S_{f\,nn}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{nn}(\tau) \cdot e^{-j 2\pi f \tau}\, d\tau \quad (13)$$

Die Autokorrelationsfunktion $R_{n_a n_a}(\tau)$ und das Leistungsdichte-Spektrum $S_{f\,n_a n_a}(f)$ des am Filter-System-Ausgang auftretenden Rauschsignals $n_a(t)$ sind entsprechend zugeordnet:

$$R_{n_a n_a}(\tau) = \lim_{T_m \to \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n_a(t) \cdot n_a(t+\tau)\,dt \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f\,n_a n_a}(f) \cdot e^{j 2\pi f \tau}\,df \tag{14}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet\ f$$

$$S_{f\,n_a n_a}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{n_a n_a}(\tau) \cdot e^{-j 2\pi f \tau}\,d\tau \tag{15}$$

In Gl. (12) und in Gl. (14) $\tau=0$ gesetzt, ergibt:

$$R_{nn}(0) = \lim_{T_m \to \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n^2(t)\,dt \right) = n_{eff}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f\,nn}(f)\,df \qquad (16)$$

bzw.

$$R_{n_a n_a}(0) = \lim_{T_m \to \infty} \left(\frac{1}{T_m} \cdot \int_{-T_m/2}^{+T_m/2} n_a^2(t)\,dt \right) = n_{aeff}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f\,n_a n_a}(f)\,df \qquad (17)$$

$\Rightarrow$ Erklärung für die Bezeichnung "Leistungsdichte-Spektrum" oder "spektrale Leistungsdichte"

Berechnung der Autokorrelationsfunktion $R_{n_a n_a}(\tau)$ aus $R_{nn}(\tau)$ und der Autokorrelationsfunktion $\varphi_{hh}(\tau)$ der Stossantwort h(t) des LZI-Systems ("Wiener-Lee-Kriterium"):

$$\begin{array}{ccccc} R_{n_a n_a}(\tau) & = & R_{nn}(\tau) & * & \varphi_{hh}(\tau) \\ \Big\updownarrow f & & \Big\updownarrow f & & \Big\updownarrow f \\ S_{f\,n_a n_a}(f) & = & S_{f\,nn}(f) & \cdot & \phi_{f\,Eh}(f) \end{array} \qquad (18)$$

Hierin das Energiedichte-Spektrum $\phi_{f\,Eh}(f)$ der Stossantwort h(t) durch $\left|H_f(f)\right|^2$ ersetzt, führt zu:

$$S_{f\,n_a n_a}(f) = S_{f\,nn}(f) \cdot \left|H_f(f)\right|^2 \qquad (19)$$

Die Beziehung (19), die das Leistungsdichte-Spektrum $S_{f\,nn}(f)$ des Eingang-Rauschsignals n(t) in das Leistungsdichte-Spektrum $S_{f\,n_a n_a}(f)$ des Ausgang-Rauschsignals umrechnet, in Gl. (17) eingesetzt, ergibt

$$R_{n_a n_a}(0) = n_{a\,eff}^2 = N_a = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{f\,nn}(f) \cdot \left| H_f(f) \right|^2 df \qquad (20)$$

Resultat:

Bei bekannter spektraler Leistungsdichte $S_{f\,nn}(f)$ des am LZI-System-Eingang anliegenden Rauschsignals n(t) und bekannter Stossantwort h(t) lässt sich die mittlere Leistung N_a bzw. der Effektivwert $n_{aeff} = \sqrt{N_a}$ des Ausgang-Rauschsignals $n_a(t)$ berechnen.