Lösung zu Aufgabe 3

3.1 Allgemein: [Markoff-Quelle 1. Ordnung]!
Die Auftrittswahrscheinlichkeit für ein Zeichen x_i hängt vom Zustand der Quelle ab.

Aktueller Zustand (Zeitpunkt): k
Vorheriger Zustand (Zeitpunkt): $k-1$

$$p_k(x_i) = \sum_{j=1}^{N} p_k(x_i|x_j).p_{k-1}(x_j)$$

Die Gleichung kann in Matrixform geschrieben werden:

- Wahrscheinlichkeitsvektor des k-ten Zustands: $\mathbf{w}_k$
- Wahrscheinlichkeitsvektor des $(k-1)$-ten Zustands: $\mathbf{w}_{k-1}$
- Übergangsmatrix: $\mathbf{P}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_k &= (p_k(x_1),\ p_k(x_2),\ \ldots\ p_k(x_N)) \\
\mathbf{w}_{k-1} &= (p_{k-1}(x_1),\ p_{k-1}(x_2),\ \ldots\ p_{k-1}(x_N)) \\
\mathbf{P} &= \begin{pmatrix} p(x_1|x_1) & p(x_2|x_1) & \cdots & p(x_N|x_1) \\ p(x_1|x_2) & p(x_2|x_2) & \cdots & p(x_N|x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(x_1|x_N) & p(x_2|x_N) & \cdots & p(x_N|x_N) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} \cdot \mathbf{P}$$

Hier:
<u>Stationäre</u> Markoff-Quelle 1. Ordnung im stationären Zustand, so dass die Auftrittswahrscheinlichkeit für ein Zeichen nicht mehr vom Zustand k abhängt.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow k \longrightarrow \infty \\
&\Longrightarrow p_k(x_i) = p_{k-1}(x_i) = p(x_i) \\
&\hat{=} \quad \mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{w}
\end{aligned}$$

Die Matrixgleichung kann mit $w_i = p(x_i)$ folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w}\cdot\mathbf{P} \\ \Longrightarrow (w_1,w_2,w_3,w_4) &= (w_1,w_2,w_3,w_4)\cdot\mathbf{P} \end{aligned}$$

Die Einträge der Übergangsmatrix können aus dem Markoff-Diagramm abgelesen werden.

z_{n-1} \ z_n	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0.75	0.25	0	0
x_2	0	0.75	0.25	0
x_3	0	0	0.5	0.5
x_4	0.5	0	0	0.5

$$\Longrightarrow \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten $w_i = p(x_i)$ kann durch Auswertung der Matrixgleichung und der Normalisierungseigenschaft von Wahrscheinlichkeiten (Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich 1):

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{3}{4}w_1 + \frac{1}{2}w_4 \quad \Longrightarrow w_1 = 2w_4 && (1) \\ w_2 &= \frac{1}{4}w_1 + \frac{3}{4}w_2 \quad \Longrightarrow w_2 = w_1 = 2w_4 && (2) \\ w_3 &= \frac{1}{4}w_2 + \frac{1}{2}w_3 \quad \Longrightarrow w_3 = \frac{1}{2}w_2 && (3) \\ w_4 &= \frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{2}w_4 \quad \Longrightarrow w_3 = w_4 && (4) \\ w_1+w_2+w_3+w_4 &= 1 && (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow 2w_4 + 2w_4 + w_4 + w_4 &= 1 \\ \Longrightarrow w_4 = p(x_4) &= \frac{1}{6} \\ \Longrightarrow w_3 = p(x_3) &= \frac{1}{6} \\ \Longrightarrow w_2 = p(x_2) &= \frac{1}{3} \\ \Longrightarrow w_1 = p(x_1) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3.2 Die Entropie im stationären Zustand ist der Erwartungswert aller bedingten Entropien:

$$\begin{aligned} H_\infty(z) &= E\{H(z_n|z_{n-1})\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot H(z_n|z_{n-1} = x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(z_n|z_{n-1}=x_i) &= \sum_{j=1}^{N} p(x_j|x_i)\cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{p(x_j|x_i)}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{N} p_{ij}\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{p_{ij}} \\
\Longrightarrow H(z_n|z_{n-1}=x_1) &= 0.75\cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{0.75}\right)+0.25\cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{0.25}\right)=0.811\frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}} \\
H(z_n|z_{n-1}=x_2) &= 0.811\frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}} \\
H(z_n|z_{n-1}=x_3) &= 0.5\cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{0.5}\right)+0.5\cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{0.5}\right)=1\frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}} \\
H(z_n|z_{n-1}=x_4) &= 1\frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}} \\
\Longrightarrow H_\infty(z) &= \frac{1}{3}\cdot 0.811+\frac{1}{3}\cdot 0.811+\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 1=0.874\ \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}}
\end{aligned}$$

3.3 Quelle ohne Speicher: Zeichen sind statistisch unabhängig

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow H(X) &= \sum_{i=1}^{N} p(x_i)\cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{p(x_i)}\right) \\
&= (0.528+0.528+0.431+0.431)\frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}} \\
&= 1.918\ \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}}
\end{aligned}$$