Lösung zu Aufgabe 5

5.1

Die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Eingangszeichen sind

$$\begin{aligned} p(x_1) &= p_1 \\ p(x_2) &= 1 - p(x_1) = 1 - p_1 \; . \end{aligned}$$

Mit den Übergangswahrscheinlichkeiten erhält man für die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Ausgangssymbole

$$\begin{aligned} p(y_1) &= p(x_1) \cdot p(y_1|x_1) \\ &= p_1 \cdot (1 - p_{\mathrm{err}}) \\ p(y_2) &= (1 - p_1) \cdot (1 - p_{\mathrm{err}}) \\ p(y_3) &= p_1 \cdot p_{\mathrm{err}} + (1 - p_1) \cdot (1 - p_{\mathrm{err}}) = p_{\mathrm{err}} \; . \end{aligned}$$

Der Informationsfluss ist die Differenz aus Ausgangsentropie und durch den Kanal hinzugefügter Information:

$$T(X,Y) = H(Y) - H(Y|X) \; .$$

Die Ausgansentropie lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} H(Y) &= \sum_{i=1}^{3} p(y_i) \cdot \mathrm{ld} \frac{1}{p(y_i)} \\ &= p_1 \cdot (1 - p_{\mathrm{err}}) \cdot \mathrm{ld} \left(\frac{1}{p_1 \cdot (1 - p_{\mathrm{err}})} \right) \\ &\quad + (1 - p_1) \cdot (1 - P\mathrm{err}) \cdot \mathrm{ld} \left(\frac{1}{(1 - p_1) \cdot (1 - p_{\mathrm{err}})} \right) \\ &\quad + p_{\mathrm{err}} \cdot \mathrm{ld} \left(\frac{1}{p_{\mathrm{err}}} \right) \\ &= p_1 \cdot (1 - p_{\mathrm{err}}) \cdot \left[\mathrm{ld} \left(\frac{1}{p_1} \right) + \mathrm{ld} \left(\frac{1}{1 - p_{\mathrm{err}}} \right) \right] \\ &\quad + (1 - p_1) \cdot (1 - p_{\mathrm{err}}) \cdot \left[\mathrm{ld} \left(\frac{1}{1 - p_1} \right) + \mathrm{ld} \left(\frac{1}{1 - p_{\mathrm{err}}} \right) \right] \\ &\quad + p_{\mathrm{err}} \cdot \mathrm{ld} \left(\frac{1}{p_{\mathrm{err}}} \right) \\ H(Y) &= (1 - p_{\mathrm{err}}) \cdot p_1 \cdot \left[\mathrm{ld} \left(\frac{1}{p_1} \right) - \mathrm{ld} \left(\frac{1}{1 - p_1} \right) \right] \\ &\quad + p_{\mathrm{err}} \cdot \left[\mathrm{ld} \left(\frac{1}{p_{\mathrm{err}}} \right) - \mathrm{ld} \left(\frac{1}{1 - p_1} \right) - \mathrm{ld} \left(\frac{1}{1 - p_{\mathrm{err}}} \right) \right] \\ &\quad + \mathrm{ld} \left(\frac{1}{1 - p_1} \right) + \mathrm{ld} \left(\frac{1}{1 - p_{\mathrm{err}}} \right) \; . \end{aligned}$$

Die Irrelevanz $H(Y|X)$ ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} \underbrace{p(y_i,x_j)}_{=p(x_j)\cdot p(y_i|x_j)} \cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{p(y_i|x_j)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} p(x_j)\cdot p(y_i|x_j)\cdot\ \mathrm{ld}\left(\frac{1}{p(y_i|x_j)}\right) \\
&= p_1\cdot(1-p_{\mathrm{err}})\cdot\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_{\mathrm{err}}}\right) \\
&\quad +p_1\cdot p_{\mathrm{err}}\cdot\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p_{\mathrm{err}}}\right) \\
&\quad +(1-p_1)\cdot p_{\mathrm{err}}\cdot\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p_{\mathrm{err}}}\right) \\
&\quad +(1-p_1)\cdot(1-p_{\mathrm{err}})\cdot\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p_{\mathrm{err}}}\right) \\
H(Y|X) &= p_{\mathrm{err}}\cdot\left[\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p_{\mathrm{err}}}\right)-\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_{\mathrm{err}}}\right)\right] \\
&\quad +\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_{\mathrm{err}}}\right)\ .
\end{aligned}
$$

Mit der Ausgangsentropie und der Irrelevanz kann die Transinformation folgendermaßen bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow T(X,Y) &= (1-p_{\mathrm{err}})\cdot p_1\cdot\left[\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p_1}\right)-\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_1}\right)\right] \\
&\quad +p_{\mathrm{err}}\cdot\left[\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p_{\mathrm{err}}}\right)-\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_1}\right)-\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_{\mathrm{err}}}\right)\right] \\
&\quad +\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_1}\right)+\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_{\mathrm{err}}}\right) \\
&\quad -\left(p_{\mathrm{err}}\cdot\left[\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p_{\mathrm{err}}}\right)-\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_{\mathrm{err}}}\right)\right]+\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_{\mathrm{err}}}\right)\right) \\
&= (1-p_{\mathrm{err}})\cdot p_1\cdot\left[\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p_1}\right)-\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_1}\right)\right] \\
&\quad +p_{\mathrm{err}}\cdot\left(-\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_1}\right)\right)+\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_1}\right) \\
&= (1-p_{\mathrm{err}})\cdot\left[p_1\cdot\left(\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p_1}\right)-\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_1}\right)\right)+\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_1}\right)\right] \\
&= (1-p_{\mathrm{err}})\cdot\left[p_1\cdot\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p_1}\right)+(1-p_1)\cdot\mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_1}\right)\right] \\
&= -(1-p_{\mathrm{err}})\cdot\left[p_1\cdot\mathrm{ld}\left(p_1\right)+(1-p_1)\cdot\mathrm{ld}\left(1-p_1\right)\right]\ .
\end{aligned}
$$

5.2 Die Kanalkapazität ist definiert als maximale Transinformation über alle Wahrscheinlichkeitsdichten der Eingangsszeichen:

$$C = \frac{1}{\triangle T} \cdot \max_{p(x_i)} T(X,Y)$$

$\Longrightarrow$ gewünscht: Maximum der Funktion
$\Longrightarrow$ 1. Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_1} T(X,Y) &= T'(X,Y) \stackrel{!}{=} 0 \\
T'(X,Y) &= -(1-p_{\text{err}}) \cdot \Bigg[\operatorname{ld}(p_1) - p_1 \cdot \frac{1}{p_1} \cdot \frac{1}{\log_{10}(2)} \\
&\quad - \operatorname{ld}(1-p_1) - (1-p_1)\frac{1}{1-p_1} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\log_{10}(2)} \Bigg] \\
&= -(1-p_{\text{err}}) \cdot \left[\operatorname{ld}(p_1) - \frac{1}{\log_{10}(2)} - \operatorname{ld}(1-p_1) + \frac{1}{\log_{10}(2)} \right] \\
&= -(1-p_{\text{err}}) \cdot [\operatorname{ld}(p_1) - \operatorname{ld}(1-p_1)] \stackrel{!}{=} 0 \\
\Longrightarrow \operatorname{ld}(p_1) &\stackrel{!}{=} \operatorname{ld}(1-p_1) \\
\Longrightarrow \quad p_1 &= 1 - P_1 \\
\Longrightarrow \quad p_1 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(X,Y)\Big|_{p_1=\frac{1}{2}} &= (1-p_{\text{err}}) \\
\Longrightarrow \quad C &= (1-p_{\text{err}}) \cdot \frac{1}{\triangle T} \,.
\end{aligned}$$