Lösung zu Aufgabe 6

6.1 Jeder lineare Blockcode kann beschrieben werden durch

$$\mathbf{c} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}$$

u : Informationswort, k Stellen
c : Codewort zu **u** , n Stellen
G : Generatormatrix, $k \times n$ - Matrix, k Zeilen, n Spalten

Jedes Informationswort korrespondiert eineindeutig zu einem Codewort. Die Anzahl von Zeilen der Generatormatrix ist die Anzahl der Informationswortstellen k, die Anzahl der Spalten ist gleich der Anzahl der Codewortstellen n.

$$\begin{array}{rrcl} \Longrightarrow & k & = & 3 \\ \Longrightarrow & n & = & 7 \\ \Longrightarrow & N & = & 2^k = 2^3 = 8 \text{ Codewörter} \\ \text{Coderate} \Longrightarrow & R_c & = & \frac{k}{n} = \frac{3}{7} = 0.43 \mathrel{\hat{=}} \frac{\text{Anzahl von Informationsstellen}}{\text{Anzahl der Codewortstellen}} \end{array}$$

Mit dem Informationswort $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 \, u_1 \, u_2 \end{pmatrix}$ folgt für die Vektor-Matrix-Multiplikation

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{G} \\ \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} u_0 \, u_1 \, u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= u_0 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1 \end{pmatrix}}_{\text{1. Zeile von } \mathbf{G}} + \\ &\quad\, u_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1\,0\,1\,0\,0\,1\,1 \end{pmatrix}}_{\text{2. Zeile von } \mathbf{G}} + \\ &\quad\, u_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0\,1\,0\,0 \end{pmatrix}}_{\text{3. Zeile von } \mathbf{G}} \end{aligned}$$

Es werden die binäre Summation und Multiplikation verwendet
$(0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+1=0)$.

$$k\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{n}\right. = \mathbf{G}$$

$$\begin{array}{lclclcl|c}
 & & & & & & & \underline{w_\mathrm{H}(c_i)} \\
\mathbf{u}_0 & = & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & = & \mathbf{c}_0 & 0 \\
\mathbf{u}_1 & = & \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} & = & \mathbf{c}_1 & 4 \\
\mathbf{u}_2 & = & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} & = & \mathbf{c}_2 & 4 \\
\mathbf{u}_3 & = & \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} & = & \mathbf{c}_3 & 4 \\
\mathbf{u}_4 & = & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & = & \mathbf{c}_4 & 4 \\
\mathbf{u}_5 & = & \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} & = & \mathbf{c}_5 & 4 \\
\mathbf{u}_6 & = & \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} & = & \mathbf{c}_6 & 4 \\
\mathbf{u}_7 & = & \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} & = & \mathbf{c}_7 & 4
\end{array}$$

Der vollständige Code ist durch alle Linearkombination der Zeilen von **G** gegeben.

6.2 Die minimale Distanz d_min des Codes ist die minimale Anzahl von Stellen, in denen sich zwei Codewörter unterscheiden. In der Vorlesung wurde hergeleitet, dass die minimale Distanz gleich dem minimalen Gewicht der Codewörter ist.

$$\begin{aligned} d_\mathrm{min} &= \min\{w_\mathrm{H}(\mathbf{c}_i)\,|\mathbf{c}_i \neq \mathbf{0}\} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Fehleranzahl in Codewörtern, die am Decoder <u>erkannt</u> werden können:

$$t_\mathrm{e} = d_\mathrm{min} - 1 = 3$$

Fehleranzahl, die am Decoder <u>korrigiert</u> werden können:

$$t = \begin{cases} \frac{d_\mathrm{min}-2}{2} & d_\mathrm{min} \text{ ist gerade} \\ \frac{d_\mathrm{min}-1}{2} & d_\mathrm{min} \text{ ist ungerade} \end{cases}$$

Hier: d_min ist gerade:

$$\Longrightarrow \quad t = \frac{d_\mathrm{min}-2}{2} = 1$$

6.3 „Jeder lineare Blockcode kann in einen äquivalenten systematischen Code transformiert werden.“

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &\longrightarrow \mathbf{G}' \qquad \mathbf{G}' = k \times n - \text{Matrix} \\ \mathbf{c} &\longrightarrow \mathbf{c}' \end{aligned}$$

Die Generatormatrix $\mathbf{G}'$ des systematischen Codes hat folgende Struktur:

$$\mathbf{G}' = \left(\, \mathbf{I}_\mathrm{k} \,\vdots\, \mathbf{P} \,\right) \qquad \begin{array}{rcl} \mathbf{I}_\mathrm{k} & : & \text{Einheitsmatrix } (k \times k) \\ \mathbf{P} & : & \text{Prüfstellenmatrix } (\,k \times (n-k)\,) \end{array}$$

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Zeilen von $\mathbf{G}'$ werden durch Kombinationen von Zeilen von $\mathbf{G}$ gebildet, so dass der erste Teil von $\mathbf{G}'$ die Einheitsmatrix $\mathbf{I}_\mathrm{k}$ ergibt.

$$\begin{array}{r} (1.+2.+3.)\ \text{Zeile von } \mathbf{G} \longrightarrow \\ (2.+3.)\ \text{Zeile von } \mathbf{G} \longrightarrow \\ (1.+3.)\ \text{Zeile von } \mathbf{G} \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \mathbf{G}'$$

Also folgt für die Prüfstellenmatrix $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Codewörter des systematischen Codes erhält man durch die Gleichung

$$\mathbf{c}' = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}'$$

$$\mathbf{G}' = \left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{u}_\mathrm{a} = (1 \quad 0 \quad 1) \qquad (\underbrace{1 \quad 0 \quad 1}_{=\mathbf{u}_\mathrm{a}} \vdots \underbrace{0 \quad 0 \quad 1 \quad 1}_{\text{Paritätsstellen}}) = \mathbf{c}'_\mathrm{a}$$

$$\mathbf{u}_\mathrm{b} = (0 \quad 1 \quad 1) \qquad (\underbrace{0 \quad 1 \quad 1}_{=\mathbf{u}_\mathrm{b}} \vdots \underbrace{1 \quad 0 \quad 1 \quad 0}_{\text{Paritätsstellen}}) = \mathbf{c}'_\mathrm{b}$$

6.4 Prüfmatrix: $\mathbf{H}'$ wird zur Fehlererkennung und -korrektur genutzt.

Eigenschaft jeder Prüfmatrix $\mathbf{H}$:

$$\begin{array}{lcll} \mathbf{c} \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T} & = & 0 & \text{falls } \mathbf{c} \text{ ein Codewort ist} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T} & \neq & 0 & \text{falls } \mathbf{x} \text{ kein Codewort ist} \end{array}$$

Konstruktion von $\mathbf{H}'$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}' &= (\,\mathbf{I}_\mathrm{k} \vdots \mathbf{P}\,) && \text{Generatormatrix}\\
\mathbf{H}' &= (\,\mathbf{P}^\mathrm{T} \vdots \mathbf{I}_{\mathrm{n-k}}\,) && \text{Prüfmatrix}
\end{aligned}
$$

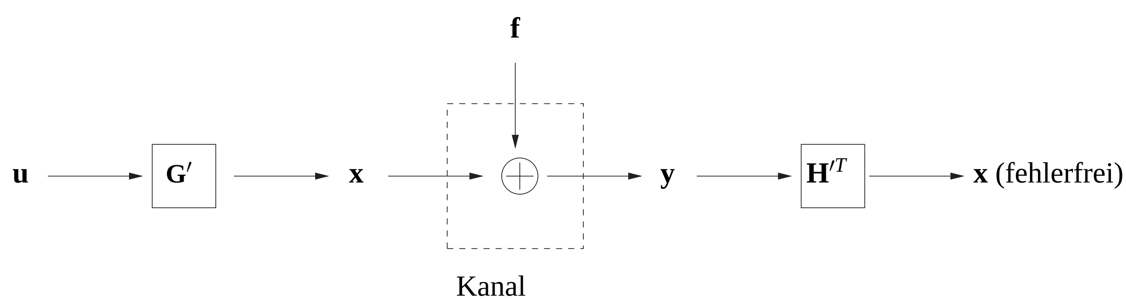
Mit der oben bestimmten Prüfstellenmatrix **P**:

$$
\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{P}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \mathbf{H}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$\mathbf{H}'$ ist Prüfmatrix für Code **c** und Code $\mathbf{c}'$ und äquivalenten Codes (Codes mit dem gleichen Satz an Codewörtern) !

6.5 Übertragungsmodel:



$\Longrightarrow$ **y** ist Ausgangssignal des Kanals

$$
\mathbf{y} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Codewort}}}{\mathbf{x}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fehlervektor}}}{\mathbf{f}}
$$

Syndromvektor:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s} &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}'^{\mathrm{T}} \\
&= (\mathbf{x} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{H}'^{\mathrm{T}} \\
&= \underbrace{\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}'^{\mathrm{T}}}_{0} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{H}'^{\mathrm{T}} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{H}'^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Syndromtabelle für Einzelfehler

$\hat{=}$ **f** hat nur eine "1"

$$\begin{aligned} \text{Fehler an Positionsnr. 2} \quad \text{e.g.} \quad \mathbf{f} &= (\ 0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0\ ) \\ \Longrightarrow \mathbf{s} &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{H'}^{\mathrm{T}} \\ &= (\ 1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1\ ) \\ &\hat{=} \ \text{dritte Spalte von } \mathbf{H'} \end{aligned}$$

Fehler an Positionsnr.	Syndrom **s**
0	1 1 1 0
1	0 1 1 1
2	1 1 0 1
3	1 0 0 0
4	0 1 0 0
5	0 0 1 0
6	0 0 0 1
kein Fehler	0 0 0 0

6.6 Empfangswort **y** (vielleicht fehlerbehaftet)

Schritt 1: Berechne Syndrom **s** : $\mathbf{s} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H'}^{\mathrm{T}}$

Schritt 2: Überprüfe **s**

falls $\mathbf{s} = 0 \Longrightarrow$ kein Fehler
(vielleicht mehr als $t_e = 3$ Fehler)

falls $\mathbf{s} \neq 0 \Longrightarrow$ suche in Tabelle

a). **s** in Tabelle vorhanden
$\Longrightarrow$ bestimme Fehlervektor **f**

b). **s** nicht in Tabelle vorhanden
$\Longrightarrow$ mehr als $t = 1$ Fehler
$\Longrightarrow$ nicht korrigierbar

Schritt 3: Korrektur des Fehlers
$\mathbf{y}_{\text{corr}} = \mathbf{y} + \mathbf{f}$

$$\mathbf{H}'^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{y}_{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{s}_{\mathrm{a}} \\
\mathbf{y}_{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{s}_{\mathrm{b}} \\
\mathbf{y}_{\mathrm{c}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{s}_{\mathrm{c}}
\end{array}$$

Die zugehörigen Fehlervektoren werden aus der Syndromtabelle abgelesen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{\mathrm{a}} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{f}_{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{s}_{\mathrm{b}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{f}_{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{s}_{\mathrm{c}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{ nicht in Tabelle vorhanden}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \mathbf{y}_{\mathrm{a,corr}} &= \mathbf{y}_{\mathrm{a}} + \mathbf{f}_{\mathrm{a}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{y}_{\mathrm{b,corr}} &= \mathbf{y}_{\mathrm{b}} + \mathbf{f}_{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{y}_{\mathrm{c,corr}} &\Longrightarrow \text{ nicht korrigierbar}
\end{aligned}$$

6.7

$$\begin{aligned}
\mathbf{s} &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}'^{\mathrm{T}} \\
\Longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{s}_0 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & \mathbf{y}_5 & \mathbf{y}_6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{H}'^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned}
\mathbf{s}_0 &= \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 \\
\mathbf{s}_1 &= \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_4 \\
\mathbf{s}_2 &= \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_5 \\
\mathbf{s}_3 &= \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_6
\end{aligned}\right\} \text{Prüfgleichungen}$$