Quellencodierung

Aufgabe 1

Eine binäre Informationsquelle generiert die zwei Zeichen x_1 und x_2 mit den Auftrittswahrscheinlichkeiten $p(x_1) = 0.8$ und $p(x_2) = 0.2$. Die Zeichen seien statistisch unabhängig.

1.1 Bestimmen Sie die Entropie $H(X)$ und die Redundanz R_{Q} der Quelle.

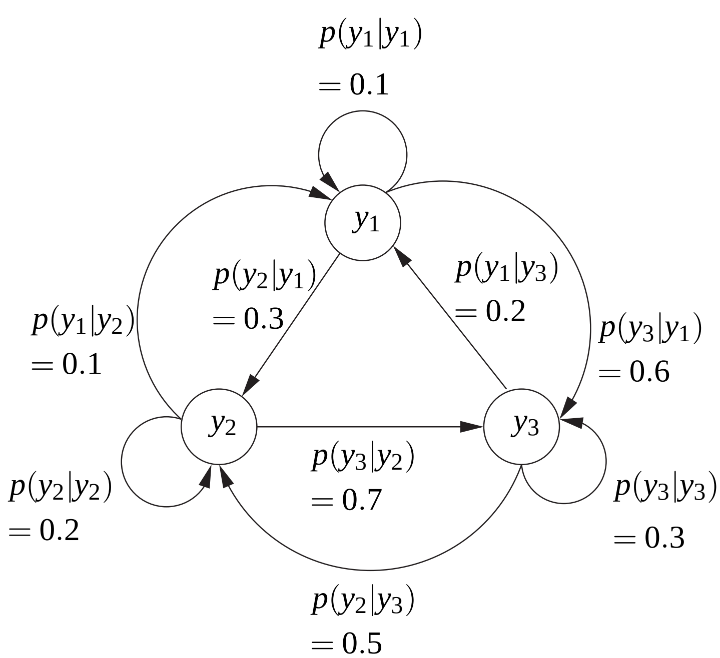
Nun werden die beiden Zeichen zu einem neuen Zeichen zusammengefasst.

1.2 Geben Sie alle möglichen Zeichenpaare und deren Auftrittswahrscheinlichkeiten an.

1.3 Bestimmen Sie die Verbundentropie $H(X,Y)$.

1.4 Codieren Sie die Zeichenpaare mit Hilfe der Verfahren von *Shannon* und *Huffman*. Berechnen Sie die mittlere Wortlänge.

Nun wird eine neue Quelle betrachtet. Die neue Quelle ist eine stationäre Markoff-Quelle 1. Ordnung mit dem Quellenalphabet y_1, y_2, y_3.



1.5 Bestimmen Sie die Übergangsmatrix $\mathbf{P}$.

1.6 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $p(y_i) = w_i$ der Quellensymbole im stationären Zustand mit Hilfe der Bedingung: $\mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{P}$.

Blockcodes / Zyklische Codes

Aufgabe 2

Gegeben ist ein linearer Blockcode mit der Generatormatrix

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1 Berechnen Sie die Anzahl von gültigen Codewörtern N und Coderate R_C. Spezifizieren Sie den Code C vollständig.

2.2 Wie groß ist die minimale *Hamming*-Distanz d_min des Codes? Wie viele Fehler können erkannt und wie viele korrigiert werden?

2.3 Bestimmen Sie die Generator-Matrix $\mathbf{G}'$ des entsprechenden systematischen Codes C'. Geben Sie hierfür das Codewort zu dem Informationswort $\mathbf{u}_\mathrm{a} = \begin{pmatrix} 1\,1\,0 \end{pmatrix}$ an.

2.4 Ermitteln Sie die Prüfmatrix $\mathbf{H}'$ des systematischen Codes C'.

2.5 Bestimmen Sie die Syndromtabelle für Einzelfehler.

2.6 Welches Codewort gehört zu dem Empfangswort $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,0\,1\,1\,1 \end{pmatrix}$?

Nun werden die Codewörter über einen binären symmetrischen Kanal (BSC) übertragen.
Die zwei Wörter $\mathbf{y}_\mathrm{a} = (1010100)$ und $\mathbf{y}_\mathrm{b} = (0011101)$ werden empfangen. Die möglicherweise fehlerhaften übertragenen Wörter werden nach dem Maximum-Likelihood-Prinzip decodiert.

2.7 Werden die empfangenen Wörter $\mathbf{y}_\mathrm{a}$ und $\mathbf{y}_\mathrm{b}$ als fehlerfrei erkannt? Begründen Sie Ihre Antwort! Finden Sie die Codewörter $\hat{\mathbf{c}}_\mathrm{a}$ und $\hat{\mathbf{c}}_\mathrm{b}$, die mit größter Wahrscheinlichkeit zu den empfangenen Wörtern $\mathbf{y}_\mathrm{a}$ und $\mathbf{y}_\mathrm{b}$ gehören.

Kanalkapazität

Aufgabe 3

Gegeben ist ein binärer symmetrischer Kanal (BSC) mit einer Bitfehlerwahrscheinlichkeit $p_{\text{err}} = 0.1$. Die binäre Zeichenrate über den Kanal ist auf $R_{\text{binaer,K}} = 1000\ \frac{\text{Zeichen}}{\text{s}}$ festgesetzt.

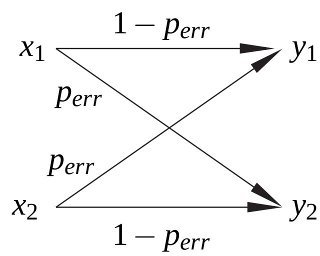


Bild 1: Binärer symmetrischer Kanal

3.1 Ermitteln Sie die Kanalkapazität C.

Eine Informationsquelle generiert die drei statistisch unabhängigen Zeichen x_1, x_2 and x_3 mit folgenden Auftrittswahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} p(x_1) &= 0.2 \\ p(x_2) &= 0.3 \\ p(x_3) &= 0.5 \end{aligned}$$

3.2 Bestimmen Sie die maximale Zeichenrate $R_{\text{Symbol,max}}$ der Informationsquelle, die über den Kanal übertragen werden kann.

Reed-Solomon-Codes

Aufgabe 4

Ein Reed-Solomon-Code über dem Galois-Feld $\mathbf{GF}(5)$ mit dem primitiven Element $z = 2$ und mit $n = 4,\ k = 2$ und der Fähigkeit, einen Fehler zu korrigieren, soll nun generiert werden.

Die Matrizen für die diskrete FOURIER-Transformation (DFT) bzw. inverse diskrete FOURIER-Transformation (IDFT) sowie die Tabellen für die Addition und Multiplikation sind auf der nächste Seite angegeben.

4.1 Bestimmen Sie mit Hilfe der IDFT das Codewort, das zu dem Informationswort $A_0 = 4,\ A_1 = 2$ gehört.

Das Codewort wurde über einen Kanal übertragen. Ein Fehler, der durch den Vektor $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben ist, tritt bei der Übertragung auf.

4.2 Finden Sie das empfangene Wort $\mathbf{r}$ und berechnen Sie das Syndrom $\mathbf{S}$ mit Hilfe der DFT.

4.3 Bestimmen Sie das Fehlerstellenpolynom $C(x)$ im Frequenzbereich und die Fehlerpositionen im Empfangswort.

4.4 Berechnen Sie den vollständigen Fehlervektor $\mathbf{F}$ im Frequenzbereich.

4.5 Ermitteln Sie das geschätzte Codewort $\hat{\mathbf{A}}$ im Frequenzbereich.

$$\mathbf{M}_{\text{DFT}} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}_{\text{IDFT}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

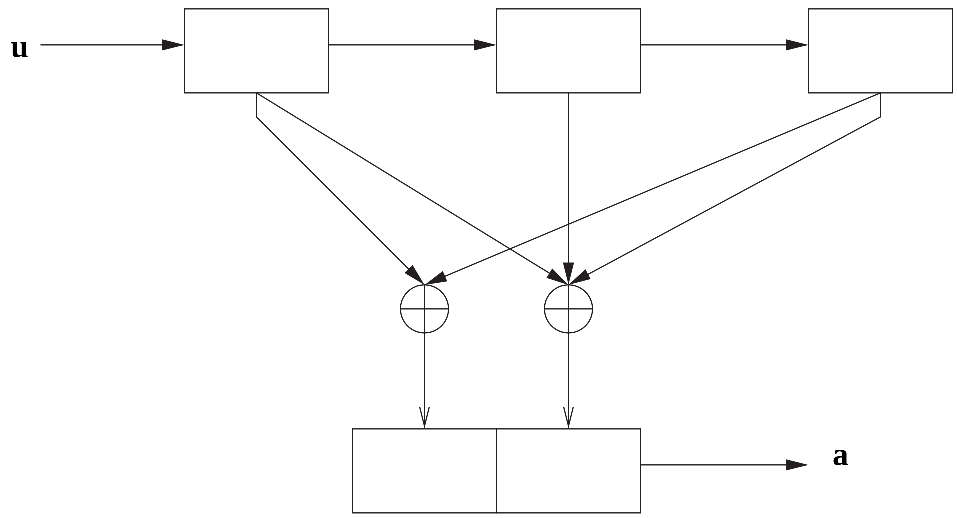
$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

a	0	1	2	3	4
$-a$	0	4	3	2	1
a^{-1}	X	1	3	2	4

Faltungscodes

Aufgabe 5

Gegeben ist das folgende Blockschaltbild eines Faltungscodierers:



5.1 Bestimmen Sie die Speicherlänge m, die Länge der Codeblöcke n, die Länge der Informationsblöcke k sowie die Einflusslänge L.

5.2 Zeichnen Sie das vollständige Zustandsdiagramm.

5.3 Bestimmen Sie die freie Distanz d_f des Codes.

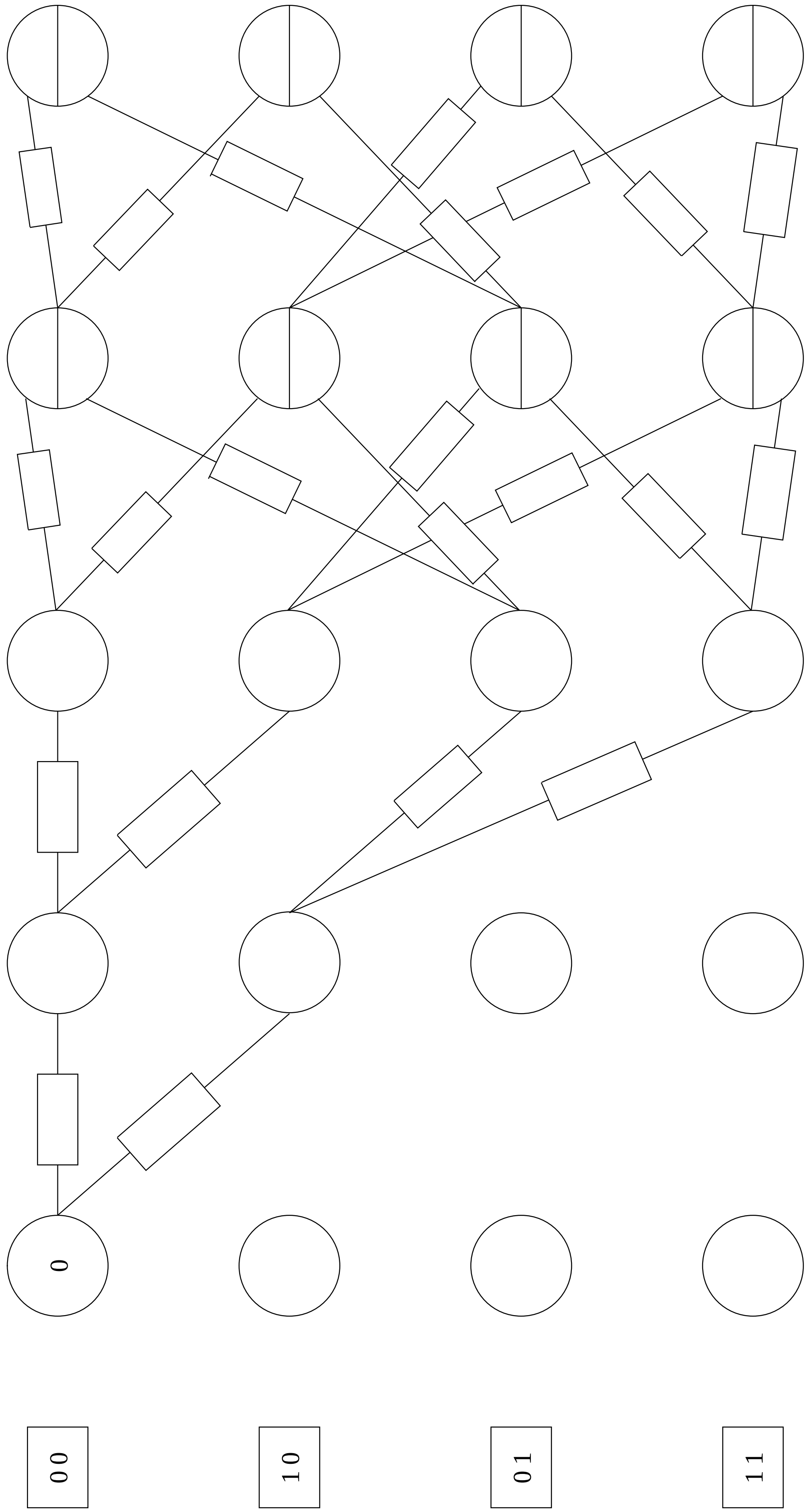
5.4 Berechnen Sie die Ausgangszeichenfolge **a** für die Eingangszeichenfolge

$$\mathbf{u} = \Big(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots\Big)$$

5.5 Führen Sie eine *Viterbi*-Decodierung für folgendes fehlerhaftes Empfangswort durch:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \Big(01,\ 00,\ 00,\ 00,\ \ldots\Big)$$

Hinweis: Verwenden Sie die Anzahl von Übereinstimmungen als Metrik und beenden Sie den Decodiervorgang nach dem 4. Schritt.


0
0 0
1 0
0 1
1 1

Lösung 1

1.1

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum_{i=1}^{N} p(x_i)\,\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p(x_i)}\right) = p(x_1)\,\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p(x_1)}\right) + p(x_2)\,\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p(x_2)}\right) \\ &= 0.26 + 0.46 = 0.72\ \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}} \end{aligned}$$

$$R_\mathrm{Q} = H_0 - H(X) = \mathrm{ld}(N) - H(X) = \mathrm{ld}(2) - H(X) = 1 - 0.72 = 0.28\ \frac{\text{bit}}{\text{Zeichen}}$$

1.2

$$\begin{aligned} x1x1: &\quad p(x1x1) = 0.8\cdot 0.8 = 0.64 \\ x1x2: &\quad p(x1x2) = 0.8\cdot 0.2 = 0.16 \\ x2x1: &\quad p(x2x1) = 0.2\cdot 0.8 = 0.16 \\ x2x2: &\quad p(x2x2) = 0.2\cdot 0.2 = 0.04 \end{aligned}$$

1.3 Da beide Zeichen von derselben Quelle erzeugt werden und die Symbole statistisch unabhängig sind, ergibt sich für die Verbundentropie:

$$H(X,Y) = 2\cdot H(X) = 1.44\ \frac{\text{bit}}{\text{Zeichenpaar}}$$

1.4 Das *Shannon* und *Huffman*-Codierungsschema ist in Übung 1 ausführlich beschrieben worden. Daher werden hier nur die Ergebnisse dargestellt.

Für eine *Shannon*-Codierung wird der Wert des Informationsgehaltes $I(x_i x_j) = -\mathrm{ld}\left(p(x_i x_j)\right)$ für jedes Zeichen benötigt.

$$\begin{aligned} x1x1: &\quad I(x1x1) = 0.64 \\ x1x2: &\quad I(x1x2) = 2.64 \\ x2x1: &\quad I(x2x1) = 2.64 \\ x2x2: &\quad I(x2x2) = 4.64 \end{aligned}$$

$x_i x_j$	$p(x_i x_j)$	$P(x_i x_j)$	$I(x_i x_j)$	$L(x_i x_j)$	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
x_1x_1	0.64	0	0.64	1	0	0	0	0	0	0
x_1x_2	0.16	0.64	2.64	3	1	0	1	0	0	0
x_2x_1	0.16	$0.8 = 0.64 + 0.16$	2.64	3	1	1	0	0	1	1
x_2x_2	0.04	$0.96 = 0.8 + 0.16$	4.64	5	1	1	1	1	0	1

Also sind die Codes für die vier Zeichenpaare:

$$\begin{array}{ll} x1x1: & 0 \\ x1x2: & 1\,0\,1 \\ x2x1: & 1\,1\,0 \\ x2x2: & 1\,1\,1\,1\,0 \end{array}$$

Die mittlere Wortlänge $\overline{L}_\mathrm{S}$ ist:

$$\begin{aligned} \overline{L}_\mathrm{S} &= \sum_{i=1}^{N} p(x_i)\,L(x_i) \\ &= p(x_1x_1)\cdot L(x_1x_1) + p(x_1x_2)\cdot L(x_1x_2) + p(x_2x_1)\cdot L(x_2x_1) + p(x_2x_2)\cdot L(x_2x_2) \\ &= 0.64\cdot 1 + 0.16\cdot 3 + 0.16\cdot 3 + 0.04\cdot 5 = 1.8\ \frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{Zeichenpaar}} \end{aligned}$$

Das Ergebnis der *Huffman*-Codierung ist:

x_ix_j	x_1x_1	x_1x_2	x_2x_1	x_2x_2
$p(x_ix_k)$	0.64	0.16	0.16	0.04
Code			0	1

x_ix_j	x_1x_1	x_2x_1	x_2x_2	x_1x_2
$p(x_ix_k)$	0.64	0.20		0.16
Code		00	01	1

x_ix_j	x_1x_1	x_2x_1	x_2x_2	x_1x_2
$p(x_ix_k)$	0.64	0.36		
Code	0	100	101	11

x_ix_j	x_1x_1	x_2x_1	x_2x_2	x_1x_2
$p(x_ix_k)$	1.00			
Code	0	100	101	11

Also sind die Codewörter der vier Zeichenpaare:

$$\begin{array}{ll} x1x1: & 0 \\ x1x2: & 1\,1 \\ x2x1: & 1\,0\,0 \\ x2x2: & 1\,0\,1 \end{array}$$

Die mittlere Wortlänge $\overline{L}_\mathrm{H}$ ist:

$$\overline{L}_\mathrm{H} = 0.64 \cdot 1 + 0.16 \cdot 2 + 0.16 \cdot 3 + 0.04 \cdot 3 = 1.56 \, \frac{\text{bit}}{\text{Zeichenpaar}}$$

1.5 Die Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ beinhaltet alle Übergangswahrscheinlichkeiten $p(z_n = y_j | z_{n-1} = y_i) = p(y_j|y_i)$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p(y_1|y_1) & p(y_2|y_1) & p(y_3|y_1) \\ p(y_1|y_2) & p(y_2|y_2) & p(y_3|y_2) \\ p(y_1|y_3) & p(y_2|y_3) & p(y_3|y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

1.6

$$\mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{P} \iff (w_1, w_2, w_3) = (w_1, w_2, w_3) \cdot \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten im stationären Zustand ist noch die Normierungseigenschaft $\sum_i w_i = 1$ notwendig. Das vollständige Gleichungssystem zur Lösung aller w_i ist daher gegeben durch:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0.1 \cdot w_1 + 0.1 \cdot w_2 + 0.2 \cdot w_3 && \text{(I)} \\ w_2 &= 0.3 \cdot w_1 + 0.2 \cdot w_2 + 0.5 \cdot w_3 && \text{(II)} \\ w_3 &= 0.6 \cdot w_1 + 0.7 \cdot w_2 + 0.3 \cdot w_3 && \text{(III)} \\ 1 &= w_1 + w_2 + w_3 && \text{(IV)} \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem kann durch folgende Operationen gelöst werden:

$$\begin{aligned}
&\text{(II)} - 2 \cdot \text{(I)} && \Longrightarrow \; w_2 - 2 \cdot w1 = 0.1 \cdot w_1 + 0.1 \cdot w_3 \\
& && \Longrightarrow \; w_2 = 2.1 \cdot w_1 + 0.1 \cdot w_3 && \text{(V)} \\
&\text{in (IV)} && \Longrightarrow \; 1 = 3.1 \cdot w1 + 1.1 \cdot w_3 \\
& && \Longrightarrow \; w_3 = 0.91 - 2.82 \cdot w_1 && \text{(VI)} \\
&\text{in (V)} && \Longrightarrow \; w_2 = 2.1 \cdot w_1 + 0.1 \cdot (0.91 - 2.82 \cdot w_1) \\
& && \Longrightarrow \; w_2 = 1.82 \cdot w_1 + 0.09 && \text{(VII)} \\
&\text{in (I)} && \Longrightarrow \; w_1 = 0.1 \cdot w_1 + 0.1 \cdot (1.82 \cdot w_1 + 0.09) + 0.2 \cdot (0.91 - 2.82 \cdot w_1) \\
& && \Longrightarrow \; w_1 = -0.282 \cdot w_1 + 0.191 \\
& && \Longrightarrow \; w_1 = 0.149 \\
&\text{in (VII)} && \Longrightarrow \; w_2 = 0.361 \\
&\text{in (VI)} && \Longrightarrow \; w_3 = 0.490
\end{aligned}$$

Die Auftrittswahrscheinlichkeiten im stationären Zustand sind folglich:

$$w_1 = 0.149 \quad w_2 = 0.361 \quad w_3 = 0.490$$

Die Gleichung (III) wurde nicht benutzt - sie dient aber zur Verifikation der Ergebnisse.

Lösung 2

2.1 Anzahl Informationsbits = Anzahl von Zeilen der Generatormatrix: $k = 3$
Anzahl von Codewortbits = Anzahl von Spalten der Generatormatrix: $n = 7$
Anzahl der Codewörter des Codes: $N = 2^k = 2^3 = 8$
Coderate: $R_\mathrm{C} = \frac{k}{n} = \frac{3}{7} = 0.43$

Die Codierung ist definiert als

$$\mathbf{c} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}$$
$$\text{mit } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_0 \; u_1 \; u_2 \end{pmatrix} \text{ und}$$
$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \; c_1 \; c_2 \; c_3 \; c_4 \; c_5 \; c_6 \end{pmatrix}$$

Um alle Codewörter zu erhalten, müssen alle möglichen Kombinationen für $u_0 u_1 u_2$ in die Matrixgleichung eingesetzt werden.

$$\begin{array}{c} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{G}$$

u_0	u_1	u_2							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1	0

Demnach ist der vollständige Code:

$$\mathbf{c}_0 = \begin{pmatrix} 0\;0\;0\;0\;0\;0\;0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 0\;1\;1\;1\;0\;1\;0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0\;1\;0\;0\;1\;1\;1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0\;0\;1\;1\;1\;0\;1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} 1\;0\;1\;0\;0\;1\;1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{c}_5 = \begin{pmatrix} 1\;1\;0\;1\;0\;0\;1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{c}_6 = \begin{pmatrix} 1\;1\;1\;0\;1\;0\;0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{c}_7 = \begin{pmatrix} 1\;0\;0\;1\;1\;1\;0 \end{pmatrix}$$

2.2 Die minimale Distanz ist die minimale Anzahl von '1' in den Codewörtern (außer dem Codewort nur bestehend aus Nullen): $d_{\text{min}} = \min\{w_h(\mathbf{c}_i) \mid \mathbf{c}_i \neq \mathbf{0}\}$ In diesem fall haben alle Codewörter die gleiche Anzahl von '1': $w_h(\mathbf{c}_i) = 4 \,\forall\, i$.

Also ist die minimale Distanz

$$d_{\text{min}} = 4$$

Die Anzahl erkennbarer Fehler in einem Codewort ist

$$t_e = d_{\text{min}} - 1 = 3$$

Die Anzahl korrigierbarer Fehler in einem Codewort ist

$$t = \begin{cases} \frac{d_{min}-2}{2} & : \quad d_{\text{min}} \text{ ist gerade} \\ \frac{d_{min}-1}{2} & : \quad d_{\text{min}} \text{ ist ungerade} \end{cases}$$

Hier: d_{min} ist gerade:

$$t = \frac{d_{\text{min}} - 2}{2} = 1$$

2.3 Die Generatormatrix des systematischen Codes und die Generatormatrix des nicht-systematischen Codes definieren den gleichen Code. Dementsprechend muss die Anzahl der Zeilen und Spalten identisch sein.

Die Generatormatrix des systematischen Codes wird gebildet durch:

$$\mathbf{G}' = \left(\mathbf{I}_k \mid \mathbf{P}\right)$$

$\mathbf{I}_k$ ist die Einheitsmatrix ($k \times k$).
$\mathbf{P}$ ist die Prüfstellenmatrix ($k \times (n-k)$).

Da die Zeilen der Generatormatrix sowie lineare Überlagerungen der Zeilen Codewörter sind, müssen die Codewörter so gewählt werden, dass die Struktur der systematischen Generatormatrix (Einheitsmatrix als linker Teil der Generatormatrix) entsteht.

Hier:

1. Zeile der Generatormatrix des systematischen Codes: $\mathbf{c}_7$
2. Zeile der Generatormatrix des systematischen Codes: $\mathbf{c}_2$
3. Zeile der Generatormatrix des systematischen Codes: $\mathbf{c}_3$

$$\mathbf{G}' = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Die Prüfstellenmatrix ist:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{\mathrm{a}} &= \mathbf{u}_{\mathrm{a}} \cdot \mathbf{G}' \\
&= \begin{pmatrix} 1\,1\,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.4 Die Prüfstellenmatrix $\mathbf{P}$ wird zur Bestimmung der Prüfmatrix $\mathbf{H}'$ verwendet:

$$\mathbf{H}' = \left(\mathbf{P}^T \mid \mathbf{I}_{n-k} \right)$$

Die Transponierte der Prüfstellenmatrix $\mathbf{P}$ ist:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist die Prüfmatrix:

$$\mathbf{H}' = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2.5 Der Syndromvektor, der zu dem Empfangswort $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{f}$ mit $\mathbf{x} \widehat{=}$ Codewort und $\mathbf{f} \widehat{=}$ Fehlervektor gehört, ist definiert als

$$\begin{aligned}
\mathbf{s} &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}'^{\mathbf{T}} = (\mathbf{x} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{H}'^{\mathbf{T}} = \underbrace{\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}'^{\mathbf{T}}}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{H}'^{\mathbf{T}} \\
&= \mathbf{f} \cdot \mathbf{H}'^{\mathbf{T}}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{H}' = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{H}'^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier: Nur Einzelfehler können korrigiert werden, so dass nur eine Syndromtabelle für Einzelfehler bestimmt werden muss. $\Longrightarrow$ Der Fehlervektor $\mathbf{f}$ enthält nur eine einzige '1'. z.B. Bitfehler an der 5. Position

$$\Longrightarrow \qquad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,1\,0\,0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{H}'^{T} = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix} \qquad \text{Dies ist die } \underline{5.} \text{ Spalte von } \mathbf{H}'.$$

Die Syndromtabelle listet die Syndrome für alle möglichen Positionen eines Einzelfehlers auf.

Fehler bei Bit X	Syndrom **s**			
1	1	1	1	0
2	0	1	1	1
3	1	1	0	1
4	1	0	0	0
5	0	1	0	0
6	0	0	1	0
7	0	0	0	1
kein Fehler	0	0	0	0

2.6 Berechnung des Syndroms:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}'^T = \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,0\,1\,1\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Suchen in der Syndromtabelle: $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad$ Fehler an der 1. Stelle

Also war das übertragene Wort:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0\,1\,1\,1 \end{pmatrix}$$

2.7 Das Empfangswort $\mathbf{y}_a$ enthält einen Fehler, da es nicht ein Codewort ist. Das empfangene Wort $\mathbf{y}_b$ enthält keinen Fehler, da es das Codewort $\mathbf{c}_4$ ist.

Falls das Codewort über einen binären symmetrischen Kanal übertragen wird, ist die Maximum-Likelihood-Decodierung einfach, da die Fehlerwahrscheinlichkeit für die Zeichen (0,1) gleich groß ist. Also muss nur die Anzahl von Übereinstimmungen zwischen dem Empfangswort und den gültigen Codewörtern betrachtet werden. Für einen anderen Kanal gilt dies aufgrund unterschiedlicher Fehlerwahrscheinlichkeiten für eine ’1’ und eine ’0’ nicht.

Die Maximum-Likelihood-Decodierung für den binären symmetrischen Kanal ist im Folgenden aufgeführt. Die Anzahl von unterschiedlichen Bits (*Hamming*-Distanz $d_{\mathrm{H}}(\mathbf{y}, \mathbf{c})$) für das Empfangswort und jedes Codewort wird hierbei berechnet.

Das Ergebnis der Decodierung ist das geschätzte Codewort, das die geringste *Hamming*-Distanz zu dem Empfangswort hat.

	$\mathbf{y}_\mathrm{a} = (1010100)$	$\mathbf{y}_\mathrm{b} = (0011101)$
$\mathbf{c}_i$	$d_\mathrm{H}(\mathbf{y}_\mathrm{a}, \mathbf{c}_i)$	$d_\mathrm{H}(\mathbf{y}_\mathrm{b}, \mathbf{c}_i)$
$\mathbf{c}_0 = (0\,0\,0\,0\,0\,0\,0)$	3	4
$\mathbf{c}_1 = (0\,1\,1\,1\,0\,1\,0)$	5	4
$\mathbf{c}_2 = (0\,1\,0\,0\,1\,1\,1)$	5	4
$\mathbf{c}_3 = (0\,0\,1\,1\,1\,0\,1)$	3	0
$\mathbf{c}_4 = (1\,0\,1\,0\,0\,1\,1)$	3	4
$\mathbf{c}_5 = (1\,1\,0\,1\,0\,0\,1)$	5	4
$\mathbf{c}_6 = (1\,1\,1\,0\,1\,0\,0)$	1	4
$\mathbf{c}_7 = (1\,0\,0\,1\,1\,1\,0)$	3	4

Das ursprünglich (geschätzte) übertragene Codewort für das Empfangswort $\mathbf{y}_\mathrm{a}$ ist $\mathbf{c}_6$, für das Empfangswort $\mathbf{y}_\mathrm{b}$ ist es $\mathbf{c}_4$.

Lösung 3

3.1 Die Kanalkapazität ist definiert als Maximum der Transinformation $T(X,Y)$ über alle Auftrittswahrscheinlichkeiten der Eingangszeichen $p(x_i)$.

$$C = \frac{1}{\triangle T} . \max_{p(x_i)} T(X,Y)$$

Die Transinformation ist definiert als:

$$T(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

wobei $H(Y)$ die Ausgangsentropie und $H(Y|X)$ die Irrelevanz des Kanals (Zusatzinformation im Kanal) darstellt.

$$\begin{aligned}
H(Y) &= \sum_{i=1}^{N_y} p(y_i) \cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{p(y_i)}\right) = -\sum_{i=1}^{N_y} p(y_i) \cdot \mathrm{ld}\left(p(y_i)\right) \\
H(Y|X) &= \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \underbrace{p(y_j, x_i)}_{p(x_i) \cdot p(y_j|x_i)} \cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{p(y_j|x_i)}\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} p(x_i) \cdot p(y_j|x_i) \cdot \mathrm{ld}\left(p(y_j|x_i)\right)
\end{aligned}$$

Die Eingangs- und Ausgangswahrscheinlichkeiten lassen sich aus dem Kanaldiagramm ablesen:

$$\begin{aligned}
p(x_1) &= p_1 \\
p(x_2) &= p_2 = (1 - p_1) \\
p(y_1) &= p_1 \cdot (1 - p_{\mathrm{err}}) + (1 - p_1) \cdot p_{\mathrm{err}} \\
&= p_1 + p_{\mathrm{err}} - 2 \cdot p_1 \cdot p_{\mathrm{err}} \\
p(y_2) &= p_1 \cdot p_{\mathrm{err}} + (1 - p_1) \cdot (1 - p_{\mathrm{err}}) \\
&= 1 - p_1 - p_{\mathrm{err}} + 2 \cdot p_1 \cdot p_{\mathrm{err}}
\end{aligned}$$

Die Ausgangsentropie und die Irrelevanz kann mit Hilfe der Auftrittswahrscheinlichkeiten bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= -[(p_1 + p_{\mathrm{err}} - 2p_1 p_{\mathrm{err}}) \cdot \mathrm{ld}(p_1 + p_{\mathrm{err}} - 2p_1 p_{\mathrm{err}}) \\
&\quad +(1 - p_1 - p_{\mathrm{err}} + 2p_1 p_{\mathrm{err}}) \cdot \mathrm{ld}(1 - p_1 - p_{\mathrm{err}} + 2p_1 p_{\mathrm{err}})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(Y|X) &= -[\, p_1 \cdot (1 - p_{\mathrm{err}}) \cdot \mathrm{ld}(1 - p_{\mathrm{err}}) \\
&\quad + p_1 \cdot p_{\mathrm{err}} \cdot \mathrm{ld}(p_{\mathrm{err}}) \\
&\quad +(1 - p_1) \cdot (1 - p_{\mathrm{err}}) \cdot \mathrm{ld}(1 - p_{\mathrm{err}}) \\
&\quad +(1 - p_1) \cdot p_{\mathrm{err}} \cdot \mathrm{ld}(p_{\mathrm{err}})\,] \\
&= -[(1 - p_{\mathrm{err}}) \cdot \mathrm{ld}(1 - p_{\mathrm{err}}) + p_{\mathrm{err}} \cdot \mathrm{ld}(p_{\mathrm{err}})]
\end{aligned}
$$

Also ist die Transinformation:

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow T(X,Y) &= -[(p_1 + p_{\mathrm{err}} - 2p_1 p_{\mathrm{err}}) \cdot \mathrm{ld}(p_1 + p_{\mathrm{err}} - 2p_1 p_{\mathrm{err}}) \\
&\quad +(1 - p_1 - p_{\mathrm{err}} + 2p_1 p_{\mathrm{err}}) \cdot \mathrm{ld}(1 - p_1 - p_{\mathrm{err}} + 2p_1 p_{\mathrm{err}}) \\
&\quad -(1 - p_{\mathrm{err}}) \cdot \mathrm{ld}(1 - p_{\mathrm{err}}) - p_{\mathrm{err}} \cdot \mathrm{ld}(p_{\mathrm{err}})]
\end{aligned}
$$

Um das Maximum zu finden, wird die Nullstelle der ersten Ableitung von $T(X,Y)$ gesucht. Mit:

$$
\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{ld}(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{x}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial p_1} T(X,Y) &= T'(X,Y) \\
&= -\Bigg[(1 - 2p_{\mathrm{err}}) \cdot \mathrm{ld}(p_1 + p_{\mathrm{err}} - 2p_1 p_{\mathrm{err}}) \\
&\quad + \underbrace{(p_1 + p_{\mathrm{err}} - 2p_1 p_{\mathrm{err}}) \cdot \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{p_1 + p_{\mathrm{err}} - 2p_1 p_{\mathrm{err}}} \cdot (1 - 2p_{\mathrm{err}})}_{\frac{1-2p_{\mathrm{err}}}{\ln(2)}} \\
&\quad -(1 - 2p_{\mathrm{err}}) \cdot \mathrm{ld}(1 - p_1 - p_{\mathrm{err}} + 2p_1 p_{\mathrm{err}}) \\
&\quad + \underbrace{(1 - p_1 - p_{\mathrm{err}} + 2p_1 p_{\mathrm{err}}) \cdot \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{1 - p_1 - p_{\mathrm{err}} + 2p_1 p_{\mathrm{err}}} \cdot (-1 + 2p_{\mathrm{err}})}_{-\frac{1-2p_{\mathrm{err}}}{\ln(2)}}\Bigg] \\
&= -(1 - 2p_{\mathrm{err}}) \cdot \Big[\mathrm{ld}(p_1 + p_{\mathrm{err}} - 2p_1 p_{\mathrm{err}}) - \mathrm{ld}(1 - p_1 - p_{\mathrm{err}} + 2p_1 p_{\mathrm{err}})\Big] \\
&\overset{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \mathrm{ld}(p_1 + p_{\mathrm{err}} - 2p_1 p_{\mathrm{err}}) &= \mathrm{ld}(1 - p_1 - p_{\mathrm{err}} + 2p_1 p_{\mathrm{err}}) \\
\Longleftrightarrow \quad p_1 + p_{\mathrm{err}} - 2p_1 p_{\mathrm{err}} &= 1 - p_1 - p_{\mathrm{err}} + 2p_1 p_{\mathrm{err}} \\
\Longleftrightarrow \quad 2\cdot(p_1 + p_{\mathrm{err}} - 2p_1 p_{\mathrm{err}}) &= 1 \\
\Longleftrightarrow \quad p_1 \cdot (1 - 2p_{\mathrm{err}}) &= \tfrac{1}{2} - p_{\mathrm{err}} = \tfrac{1}{2}(1 - 2p_{\mathrm{err}}) \\
\Longleftrightarrow \quad p_1 &= \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Das Maximum wird erreicht, wenn die Eingangszeichen ’1’ und ’0’ gleichwahrscheinlich sind:

$$\begin{aligned}
T(X,Y)|_{p_1=0.5} &= -\left[\frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot(-1) + \{(1-p_{\mathrm{err}})\cdot \mathrm{ld}(1-p_{\mathrm{err}}) + p_{\mathrm{err}}\cdot \mathrm{ld}(p_{\mathrm{err}})\}\right] \\
&= 1 - \left[(1-p_{\mathrm{err}})\cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_{\mathrm{err}}}\right) + p_{\mathrm{err}}\cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{p_{\mathrm{err}}}\right)\right]
\end{aligned}$$

Die Kanalkapazität eines binären symmetrischen Kanals ergibt sich zu:

$$\Longrightarrow \qquad C = \frac{1}{\triangle T}\cdot\left[1 - \left\{(1-p_{\mathrm{err}})\cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p_{\mathrm{err}}}\right) + p_{\mathrm{err}}\cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{p_{\mathrm{err}}}\right)\right\}\right]$$

Mit

$$\frac{1}{\triangle T} = R_{\mathrm{binaer,K}} = 1000\,\frac{\mathrm{Zeichen}}{\mathrm{s}} \quad \text{und} \quad p_{\mathrm{err}} = 0.1$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad C &= 1000\cdot\left[1 - \left\{0.9\cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{0.9}\right) + 0.1\cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{0.1}\right)\right\}\right] \\
&= 531\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

3.2 Die Entropie der Quelle ist

$$H(X) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i)\,\mathrm{ld}\left(\frac{1}{p(x_i)}\right) = 1.485\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{Zeichen}}$$

Der Informationsfluss der Quelle ist gegeben durch:

$$R = H(X)\cdot R_{\mathrm{Symbol}} = 1.485\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{Zeichen}}\cdot R_{\mathrm{Symbol}}$$

Die Information der Quelle kann übertragen werden, wenn der Informationsfluss kleiner als die Kanalkapazität ist.

$$\begin{aligned}
R = 1.485\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{Zeichen}}\cdot R_{\mathrm{Symbol}} &\leq C = 531\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}} \\
\longrightarrow R_{\mathrm{Symbol}} &= \frac{531\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}}{1.485\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{Zeichen}}} \\
&= 357.46\,\frac{\mathrm{Zeichen}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Lösung 4

4.1 Das Codewort im Frequenzbereich $\mathbf{A}$ besteht aus $k = 2$ Informationszeichen und $n - k = 4 - 2 = 2$ Prüfzeichen (deren Werte sind Null).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \underbrace{A_0 \quad A_1}_{\text{Informationszeichen}} & \overbrace{0 \quad 0}^{\text{Prüfzeichen}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit $\mathbf{a}^T = \mathbf{M}_{\text{IDFT}} \cdot \mathbf{A}^T$ kann das Codewort in den Zeitbereich transformiert werden (**Alle Berechnungen werden mit Hilfe der Tabellen durchgeführt**):

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4+2+0+0 \\ 4+4+0+0 \\ 4+3+0+0 \\ 4+1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Das Codewort im Zeitbereich ist:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 Der Empfangsvektor im Zeitbereich ist definiert als $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{f}$:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Um das Syndrom zu ermitteln, muss der Empfangsvektor in den Frequenzbereich transformiert werden: $\mathbf{R}^T = \mathbf{M}_{\text{DFT}} \cdot \mathbf{r}^T$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^T &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4+3+3+0 \\ 4+4+2+0 \\ 4+2+3+0 \\ 4+1+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Das Empfangswort im Frequenzbereich ist:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Falls das Wort fehlerfrei ist, müssen die letzten zwei Symbole Null sein ($\hat{=}$ Prüfzeichen des Codewortes). Ansonsten enthält das Empfangswort einen Fehler. Die letzten $n-k=2$ Stellen bilden das Syndrom **S**:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Also ist $S_0 = 4$ und $S_1 = 2$.

4.3 Zur Bestimmung der Fehlerposition kann das Fehlerstellenpolynom herangezogen werden.

$$C(x) = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \cdots + C_e \cdot x^e$$

e ist die Anzahl von Fehlern (unbekannt und zu bestimmen)

Bestimmung von C_0, $C_1, \cdots C_e$ durch Lösen folgender Matrixgleichung:

$$\begin{pmatrix} S_e & S_{e-1} & \cdots & S_1 & S_0 \\ S_{e+1} & S_e & \cdots & S_2 & S_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_{2t-2} & S_{2t-3} & \cdots & S_{2t-e-1} & S_{2t-e-2} \\ S_{2t-1} & S_{2t-2} & \cdots & S_{2t-e} & S_{2t-e-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{e-1} \\ C_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die unbekannte Anzahl von Fehlern e wird zunächst zu $e=1$ angenommen (ein Fehler, wahrscheinlichste Fall) und es wird versucht, die Matrixgleichung zu lösen. Falls dies gelingt, war die Annahme $e=1$ korrekt, ansonsten wird $e=2$ angenommen. Falls die

Gleichung nun lösbar ist, war die Annahme $e = 2$ korrekt etc.
Falls $e = t$ erreicht ist und die Matrixgleichung immer noch nicht lösbar ist, kann das Empfangswort nicht mehr korrigiert werden (Anzahl von Fehlern ist größer als die Anzahl korrigierbarer Fehler).

Alle Berechnungen werden im Galois-Feld $\mathbf{GF}(5)$ durchgeführt!

Annahme: $e = 1$. Mit $t = 1$ folgt:

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \end{pmatrix} = 0$$

C_0 oder C_1 kann immer zu 1 (Normierung) gesetzt werden. Hier: $C_0 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ C_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow & 1 \cdot 2 + C_1 \cdot 4 = 0 & \quad \Big| + (-2) \mathrel{\hat{=}} +(3) \\
&\Longrightarrow & 4 \cdot C_1 = 3 & \quad \Big| \cdot (4^{-1}) \mathrel{\hat{=}} \cdot (4) \\
&\Longrightarrow & C_1 = 2 & \\
&\Longrightarrow & C(x) = C_0 + C_1 \cdot x = 1 + 2 \cdot x &
\end{aligned}$$

Also enthält das Empfangswort einen Fehler.

Um die Position des Fehlers zu finden, wird die **Chien**-Suche durchgeführt:

$$C(x = z^i) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Empfangswort enthält einen Fehler an Stelle } i$$
$$\Big(i = 0 \ldots n-1, \qquad z = 2 \quad \text{(primitive Element)} \Big)$$

$$\begin{aligned}
C(z^0) &= 1 + 2 = 3 \neq 0 & \Longleftrightarrow \quad & \text{keinen Fehler an Pos. 0} \\
C(z^1) &= 1 + 2 \cdot 2 = 0 & \Longleftrightarrow \quad & \text{Fehler an Pos. 1} \\
C(z^2) &= 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \neq 0 & \Longleftrightarrow \quad & \text{keinen Fehler an Pos. 2} \\
C(z^3) &= 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \neq 0 & \Longleftrightarrow \quad & \text{keinen Fehler an Pos. 3}
\end{aligned}$$

4.4 Die letzten $n-k$ Zeichen des Fehlervektors im Frequenzbereich must mit dem Syndrom übereinstimmen ($\hat{=}$ letzten $n-k$ Zeichen des Empfangswortes), da jedes Codewort im Frequenzbereich an diesen Stellen nur Nullen beinhaltet! Also sind diese Stellen des Fehlervektors bekannt.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & S_0 & S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Die fehlenden ersten k Zeichen werden rekursiv bestimmt:

$$F_j = -\left(C_0^{-1}\right) \cdot \sum_{i=1}^{e} C_{i \bmod n} \cdot F_{(j-i) \bmod n}$$

$$\left(j = 0 \ldots k-1, \quad e = 1 \text{ Anzahl von Fehlern}\right)$$

Beginnend mit $j = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
F_0 &= -\left(C_0^{-1}\right) \cdot C_{1 \bmod 4} \cdot F_{(0-1) \bmod 4} \\
&= -\left(1^{-1}\right) \cdot C_1 \cdot F_{-1 \bmod 4} \\
&= -\left(1\right) \cdot 2 \cdot F_{3 \bmod 4} \\
&= 4 \cdot 2 \cdot F_3 \\
&= 4 \cdot 2 \cdot 2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Mit $j = 1$ folgt

$$\begin{aligned}
F_1 &= -\left(C_0^{-1}\right) \cdot C_{1 \bmod 4} \cdot F_{(1-1) \bmod 4} \\
&= 4 \cdot 2 \cdot 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Also ist der vollständige Fehlervektor im Frequenzbereich:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

4.5

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{R} - \mathbf{F} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lösung 5

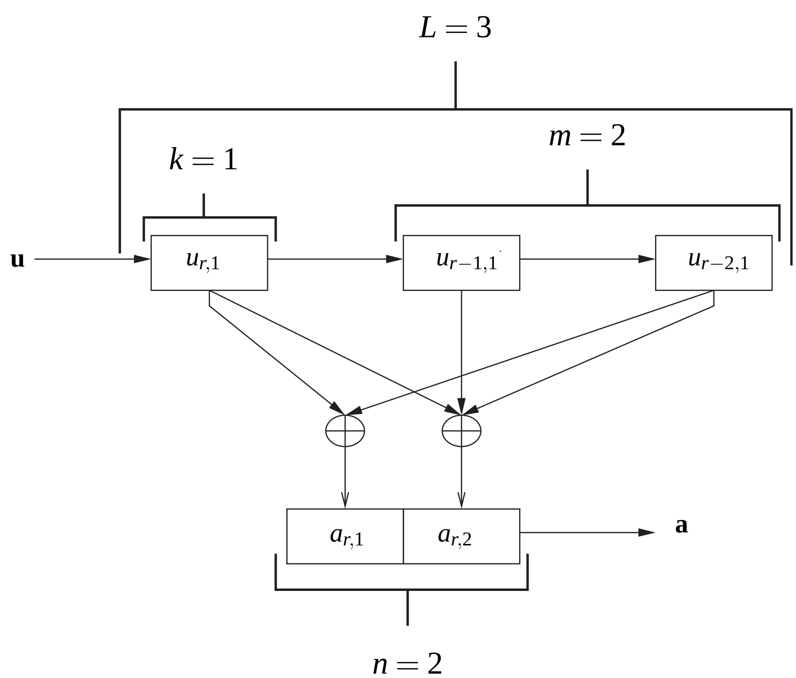
5.1 Der Informationsblock besteht aus einem Bit $\Longrightarrow \quad k = 1$.

Zwei vergangene Informationsblöcke werden benutzt, um den Codeblock zu generieren $\Longrightarrow \quad m = 2$.

Der Codeblock besteht aus zwei Bits $\Longrightarrow \quad n = 2$.

Die Einflusslänge ist die Anzahl von Informationsblöcken (aktuelle und vergangene), die benutzt werden, um den Codeblock zu erzeugen $\Longrightarrow \quad L = m + 1 = 3$.

Der aktuelle Informationsblock (ein Bit) ist: $u_{r,1}$.
Die vergangenen Informationsblöcke sind: $u_{r-1,1}$ (letzter Informationsblock) und $u_{r-2,1}$ (vorletzter Informationsblock).
Die zwei Bits des Codewortblocks sind: $a_{r,1}$ und $a_{r,2}$.



5.2 Die Gleichungen für den Codewortblock kann direkt aus dem Blockschaltbild abgelesen werden:

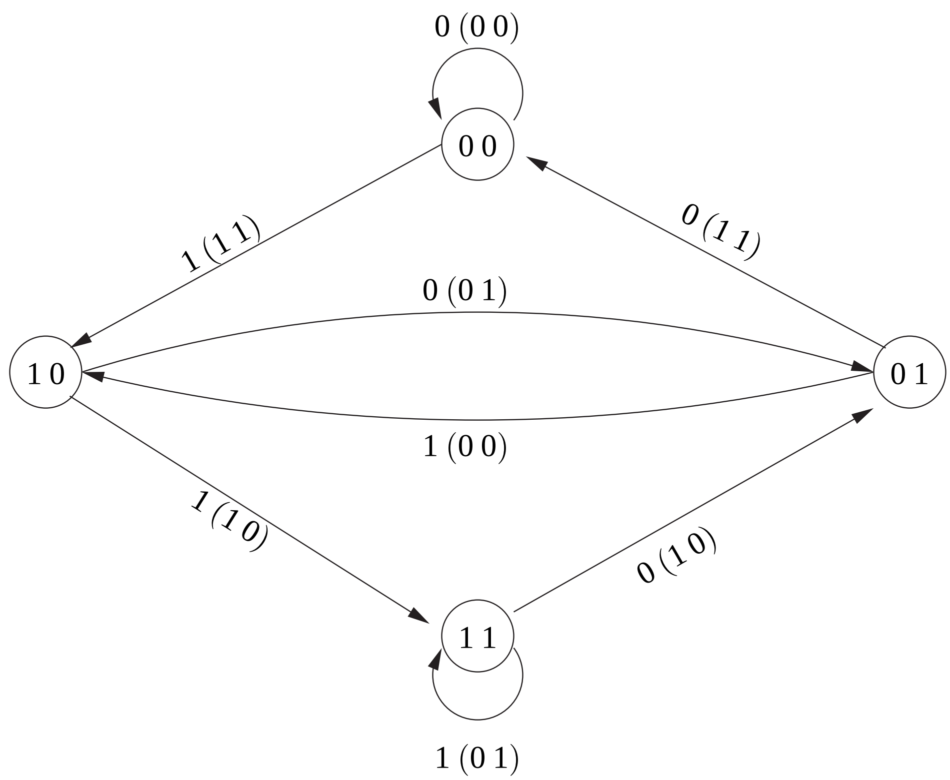
$$a_{r,1} = u_{r,1} + u_{r-2,1} \qquad a_{r,2} = u_{r,1} + u_{r-1,1} + u_{r-2,1}$$

Mit diesen Gleichungen kann die Zustandstabelle leicht abgeleitet werden:
Alle möglichen Kombinationen des Eingangs $u_{r,1}$ und der Zustände $u_{r-1,1}$ und $u_{r-2,1}$ müssen berücksichtigt werden, beginnend bei $0,0,0$ bis zu $1,1,1$. Der nächste Zustand kann direkt bestimmt werden, da er sich aus einfachem Verschieben der Werte ergibt:

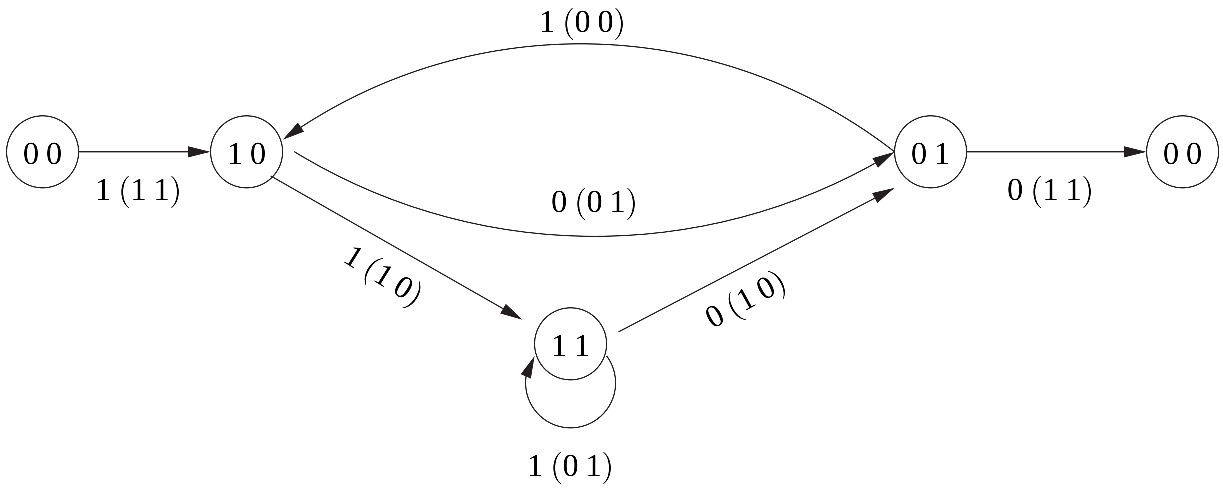
$$u^{+}_{r-1,1} = u_{r,1} \qquad u^{+}_{r-2,1} = u_{r-1,1}$$

Eingang	Aktueller Zustand		Nächster Zustand		Ausgang	
$u_{r,1}$	$u_{r-1,1}$	$u_{r-2,1}$	$u^+_{r-1,1}$	$u^+_{r-2,1}$	$a_{r,1}$	$a_{r,2}$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1

Das vollständige Zustandsdiagramm enthält den aktuellen und nächsten Zustand sowie den Eingang und den Ausgang des Codierers.



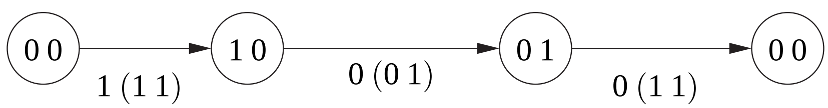
5.3 Um die freie Distanz zu bestimmen, wird das Zustandsdiagramm beim Nullzustand aufgebrochen:



Pfade beginnend vom Nullzustand und endend im Nullzustand werden auf die minimale Anzahl von Einsen im Ausgang überprüft.

Der Pfad mit der minimalen Anzahl von Einsen am Ausgang ist der Fundamentalweg. Die minimale Anzahl von Einsen ergibt die freie Distanz d_f.

Hier ist der Fundamentalweg:



und die freie Distanz $d_\mathrm{f} = 5$.

5.4 Mit dem Zustandsdiagramm folgt:

$$\mathbf{a} = \Big(11,\ 10,\ 01,\ 10,\ 00,\ 01,\ 11,\ 00,\ 00,\ 00,\ 00,\ \ldots\Big)$$

5.5 Das empfangene Wort ist:

$$\mathbf{r} = \Big(10,\ 10,\ 01,\ 10,\ 00,\ 01,\ 11,\ 00,\ 00,\ 00,\ 00,\ \ldots\Big)$$

Um den Viterbi-Algorithmus verwenden zu können, werden die fehlenden Einträge in das Trellis-Diagramm (Eingang und Ausgang für alle möglichen Übergänge) gemacht.

Der Viterbi-Algorithmus gibt die Eingangssequenz zurück, dessen Ausgangssequenz der empfangenen Sequenz am ähnlichsten ist. Folgende Schritte werden hierfür durchgeführt:

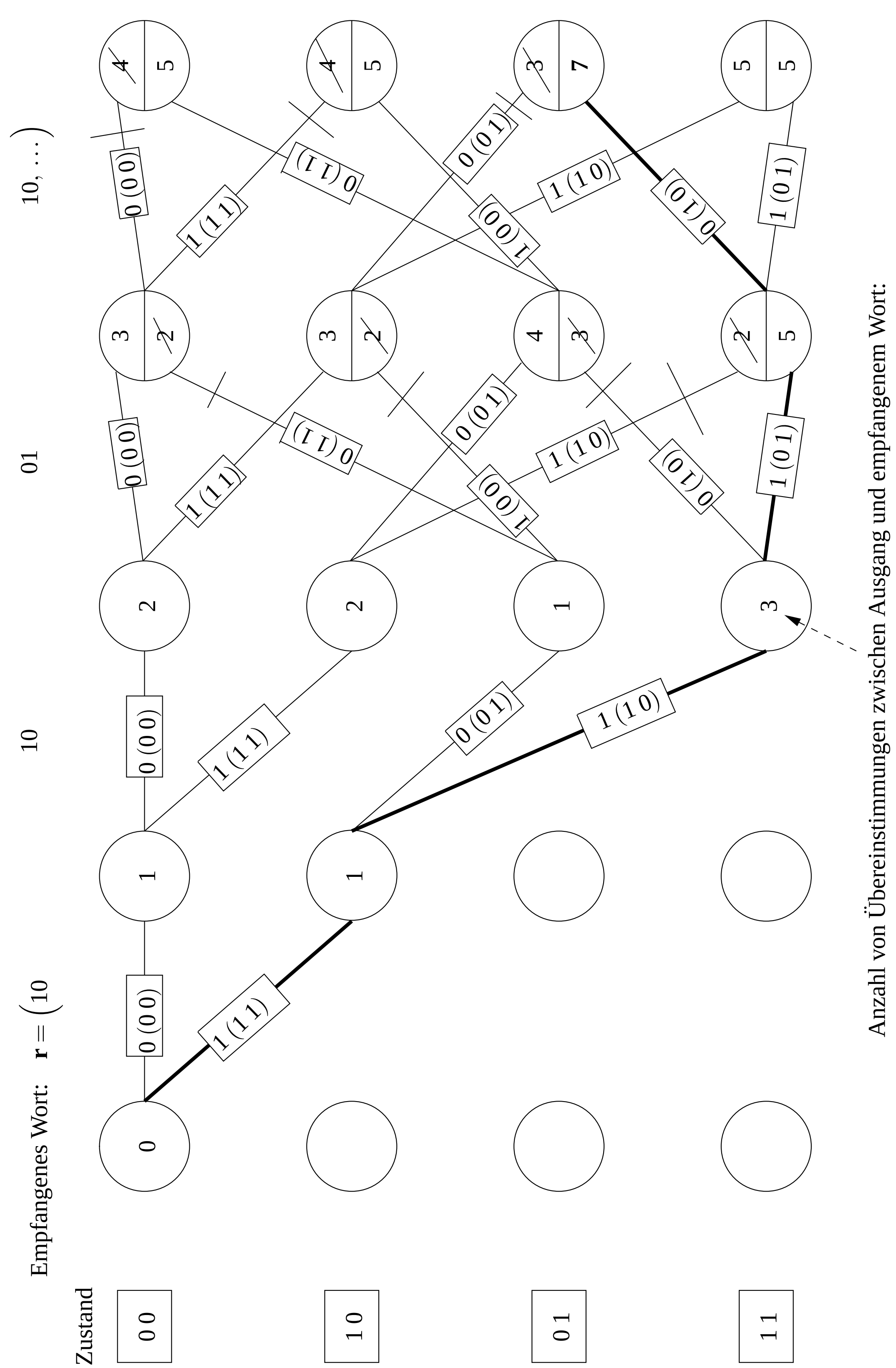
- Beginne im Nullzustand (links) des Trellis-Diagramms.
- Berechne die Anzahl von Übereinstimmungen zwischen Ausgang und empfangenen Bits für alle möglichen Übergänge zum nächsten Schritt.

- Berücksichtige bei jedem Zustand nur die maximale Anzahl von Übereinstimmungen für die weiteren Berechnungen. Alle weiteren Werte der Übereinstimmungen werden gelöscht (und damit die Wege, die zu diesen Werten geführt haben).
- Schließlich verwende den Weg durch das Trellis-Diagramm mit der größsten Anzahl von Übereinstimmungen und verfolge den Weg bis zum Anfang des Trellis-Diagramms zurück. Die entsprechende Eingangsbitsequenz ist die wahrscheinlichste übertragene Sequenz.

Die nächste Seite zeigt das Trellis-Diagramm nach Ausführung des Viterbi-Algorithmus (endend nach dem 4. Schritt). Der Weg mit der größten Anzahl von Übereinstimmungen (hier 7) ist hervorgehoben.

Die zugehörige geschätzte Eingangssequenz ist:

$$\hat{\mathbf{u}} = \Big(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ \ldots\Big)$$


Empfangenes Wort: $\mathbf{r} = (10 \quad 10 \quad 01 \quad 10, \ldots)$
Zustand
00
10
01
11
Anzahl von Übereinstimmungen zwischen Ausgang und empfangenem Wort: